

自分を広げるための数学

| { ちょっと昔の高校生へ | {

正 田 良：著

東京電機大学生協同組合

目次

1	数学をしなくてはならないの?と問われて	3
1.1	極私的前置き	3
1.2	2人の教師	4
1.3	日常生活を豊かに	5
1.4	数学を使うとは何か	7
2	未知数としての文字	11
2.1	表象に関する発達	11
2.2	榊プラン	12
2.3	記号論からみた教具	13
3	関数の導入	15
4	3次元幾何	21
5	文字の特色	29
5.1	語の特色	29
5.2	文字の難しさ	31
5.3	課題分析と文字への意味付け	32
6	練習の系統	37
6.1	二次方程式の解の公式	37
6.2	因数分解	38
6.3	一次方程式	41

7	数論と代数的構造	45
7.1	基本法則の確認	45
7.2	整数の性質	46
7.3	ユークリッドの互除法	47
8	数の拡張	53
8.1	自然数とは何か	53
8.2	演算について閉じていること	54
8.3	正負の数	55
8.4	代数和をめぐって	56
8.5	端数の処理	58
9	文章題と量的関係	61
9.1	代数学の3つの段階	61
9.2	公式の3つの量	62
9.3	多次元量	64
9.4	量の種類と量の理解	65
9.5	内包量と外延量	66
10	論証と図の役割	69
10.1	小学校と中学校の図形	69
10.2	ピアジェの発達心理学	70
10.3	日本での幾何の扱い	71
10.4	幾何の図	72
10.5	幾何の証明	73
11	四角形の性質	77
11.1	四角形の分類	77
11.2	敷き詰め	78
12	ベクトルとパラメータについて	83
12.1	平行移動をあらわすベクトル	83

目次	iii
12.2 斜交座標としてのベクトル	85
12.3 直線のパラメータ表示	86
12.4 内積と外積	87
13 代数を用いた作図	93
13.1 四則の作図	93
13.2 方巾の定理	94
13.3 平方根の作図	94
13.4 フェルマーとデカルト	95
14 公式とアルゴリズム	99
14.1 発見法	99
14.2 作図	100
14.3 証明の計算化	102
14.4 アルゴリズム	104
15 微分・積分の基礎知識	107
15.1 時間と速度	107
15.2 逆微分と区分求積法	109
15.3 グラフの典型と応用	109
15.4 グラフをかくということ	110
16 離散数学と確率	113
16.1 パスカルの三角形	113
16.2 数列の和と階差	114
16.3 漸化式	115
16.4 確率	116
17 明治期における洋算の移入	119
17.1 留学	119
17.2 お雇い外国人	120
17.3 中学校の数学教科書	121

18	3つの国定教科書	123
18.1	黒表紙の時代	123
18.2	形式陶冶の否定	124
18.3	数学教育改造運動	126
18.4	緑表紙の時代	127
18.5	水色表紙の時代	128
19	戦後の学習指導要領	131
19.1	試案の2文字	131
19.2	生活単元学習	132
19.3	系統学習	132
19.4	現代化とその後	133
19.5	国際数学教育調査	136
19.6	個性とは何か	137
20	あとがきにかえて	141
20.1	本を書くこと	141
20.2	話すこと	142
20.3	授業の柔軟性とテキスト	144
20.4	大学の講義	144

Chapter1

数学をしなくてはならないの？ と問われて

1.1 極私的前置き

いまから、20年ほど前になります。私は大学の4年生で、卒論の取材のために附属高等学校にお邪魔していました。気取った言い方をすれば、クラスの生徒さんの中に入ってエスノグラフィのような研究を目指していました。未熟者がノホホンと遊びに行ってたといった方が早いような状態でしたが、それなりに生徒さんと知りあいになり、物好きな大学生として付きあってくれてました。あるとき、『じゃあ、このページの問題をノートに解いてごらん』と先生が指示されたあとで、クラスの様子を観察していた私に「どうして数学なんてやらないといけないんですか」と質問してくれた生徒さんがいました。このときのことを、月本さんが^[1]書いて下さいましたが、「そうやって、プーッとほっぺたを膨らませる仕草がやたら可愛い」生徒さんでした。その後御無沙汰してますが、年齢の足し算をしてみると恐らくよいお母さんになって、いまごろ小学生の子どもさん相手に掛け算九九の特訓でもしているのではないかと思います。

どうして数学をするのか？という問をもらったことは、大学を出てすぐに教師になった私にとって、よい指針を与えてくれました。なぜ、数学をするのかに答えるために、実は数学の授業が綿々とあるのではないか。この1時間の授業を終えて、

[1]月本 裕,1995『東京大学物語 偏差値81への恋愛方程式』(小学館) p.128

その時間に現れた数学の存在意義がわかる授業をしたい。キザな言い方になりますが、『なぜ、数学をするのか?』『うん、その答えがこの授業なんだよ』。実現できたかについてはちょっと自信がないですが、そう言えるような授業をしたいと思っていました。

数学は系統的な学問のように思われます。確かに『ユークリッド原論』^[2]に代表されるように公理から始まって確固とした順番で定理が並んで行きます。教科書の1ページ目から順を追っていかないと論理体系を外れてしまうような気がします。47ページまで授業で読み進んだなら、次の時間はその次の48ページから説明があることが、教師と生徒の暗黙の了解であるかも知れません。そして、教科書の何ページから何ページまでが試験範囲となって、試験にできるからという理由を取り除いてしまうと存在意義ががすれて見えなくなってしまうような教科が数学ってのが世間一般の評判かもしれません。

そのような評判の上にならなくて、物好きな学生を茶目つけをだして試そうとその生徒さんはしたのでしょうか。そのときうまい返答ができたか自信がないのですが、いま、数学の教えかたを教えるという立場になって、そのテキストとして本を書く機会に恵まれました。この本で、20年遅れの返事を書きたいと思います。テキストと言うよりも、電車の中で読んでいただいて、「へえー」と授業の舞台裏に何かしら感心していただける本でありたいと思っています。

1.2 2人の教師

さて、私の答えを書く前に、ご紹介しておきたいことが2つあります。京都大学の教員であった森毅さん^[3]は、1970年ころの大学紛争で学生によってバリケード封鎖された大学構内で数学の授業をされたそうです。今日来た学生が次に来てくれるかわからないし、今日来ている学生はこの前の話を聴いているかわからない。その時間だけで、それなりに完結するような「読み切り」の話をされたそうです。今日の話は明日の準備、明日はまたその次の準備。こうなってくると、何のためにという疑問はあとへとへと遅延されていきます。そして、その疑問に答えられること

[2] 共立出版から翻訳が出ています。

[3] 森毅, 1985 『現代の古典解析 微積分基礎課程』(日本評論社 gaymath 1) のはしがき

のないまま、いつのまにか生徒や学生は数学から離れています。「読み切り」は、この遅延をせずにその時間のなかで意義に答えるという課題が教え手に課せられますが、授業にはぜひ必要としたい要素であると思います。だから、この本のそれぞれの章で教える意義について答えになるように書いていきたいと思います。それにしても、大学の数学で「読み切り」とはすごいですね。

そして、次に紹介したい教師は、俵万智さん^[4]です。

これではただの難行苦行だ。嫌いになってもしかたがない、こうして、私自身、数多くの「古典嫌い」を生み出してしまった。「古典なんか読めなくても生きていけるぜ」「なんで、そんな昔の人の書いたもん、読まなきゃなんないのよぉ」「外国語みたいだけどさ、外国語よりタチ悪いよね。だって会話とかに使えないじゃん」……さまざまなグチに答えられる言葉はただ一つ。「おもしろいから」である。本文^[5]のなかでも書いたことだが、古典というのは「おもしろいから」読みつがれてきた。いわば時代を越えてのベストセラーなのだ。

数学を学ぶ理由として、「将来役に立つから」が意外に多く指摘されますが、実は日常生活で使うものはせいぜい小学校の4・5年の算数までという話もあります。この「日常生活」という言葉はすぐ後に検討したいと思いますが、上に紹介した俵先生の誠実な答えのように、むしろ、なぜ授業で面白さが伝わらないのだろうという視点が必要なのでしょう。

1.3 日常生活を豊かに

私の中1の数学を担当するときには決まって次の2冊のうち少なくとも1冊を読むことを夏休みの宿題にしていました。自分が読書感想文を書くことが嫌いでしたから、「友達に勧めるあるいは読まないことを勧める文章を書きなさい。」を読んだ証拠としていました。

関東平野のまっただなかを快走しているときの時速は表定速度を大きく上回る。時刻表少年の私としてはそれを知りたい。そのために秒針

[4] 俵万智, 1995 『恋する伊勢物語』(筑摩文庫)の「文庫本のためのあとがき」

[5] 同書の「あとがき」

のついた父の懐中時計を借りてきていた。…(中略)… 距離標と距離標との間の所要時間が 30 秒であれば時速 60km、25 秒ならば 72km となる。…(中略)… もう一つの計測法は、線路の継目の音である。今日ではレールの長さがまちまちになり、ロングレールなども敷かれてこの方法は通用しなくなったが、当時のレールは 10m に統一されていたのでくあいよかった。^[6]

私はこの本がすごく好きです。中学生の男の子には特に勧めたい本で、レポートにも友達に勧めたいというコメントが多く見られます。入手がしにくく^[7]なって、ましたが、増補版が去年出てまた買えるようになりました。生徒が良い本を手軽に手に取れる学校図書館の必要性を痛感しています。

さて、2冊目は、太平洋戦争中の広島でのことです。

少なくとも爆風が 300m より強かったことだけは確認できたのだが、それではその強さは秒速 500m なのか、1000m なのか。北は、…(中略)… ある方法を思いついた。最初に閃光を感じてから爆風が来るまでの動作を当日そのままに何度も繰り返してみた。そして、その時間経過をストップウォッチで計測した。経過時間は、約 5 秒であった。爆心地から気象台まで 3.6km。…(中略)… 爆風の速度は、秒速 700m となる。音速の約二倍だ。^[8]

このどちらの本も、本全体から登場人物の人となりを知ってこの場面を味わって欲しいのですが、結論を急ぎます。前者は趣味の分野、後者は仕事という対照はあります。しかし、どちらも心底その作業に打ち込んでいて、その時間を充実させています。そして、奇しくも時計を使って速さを測ることで、とにかく数学を使っていることは共通しています。この 2 つの例を頭において、「日常生活で使うものはせいぜい小学校の 4・5 年の算数まで」という議論を思いだしてみてください。この 2 人は数学を日常生活の中で、その行動をより質の高いものにしようとする道具として使っているのです。失礼な言い方になってしまうかもしれませんが、「日常生

^[6]宮脇俊三,1980『時刻表昭和史』(角川選書)第5章 急行701列車新潟行き 昭和12年

^[7]宮脇俊三,1991『旅は自由席』(新潮文庫)所収の「自作再見『時刻表昭和史』」

^[8]柳田邦夫,1975『空白の天気図』(新潮文庫)第5章2

活で使うものはせいぜい小学校の4・5年の算数まで」と豪語する人の「日常生活」のレベルは、その程度なのです。

日常生活の中にどれほど数学を使えることが可能となっているのでしょうか。必要ならそのとき勉強するさというの、一つの考えではあります。でも、学校でかなりの時間を数学に裂くのですから、こんなときひょっとしたら使えるかもしれないぞという道具の標本、カタログぐらいの機能を数学の授業がもっているのではないのでしょうか。入試制度の弊害さと言ってしまうのは簡単かもしれませんが、それでは救いがありません。そのような観点で中・高の数学を皆さんとともに再訪したいのです。

1.4 数学を使うとは何か

数学を使うことって何でしょうか。ことによると、時間割に「数学」と書かれている時間に行われることを安易に数学と思っているってことがないでしょうか。次の図式⁹は、この間を考えるのにヒントを与えてくれます。

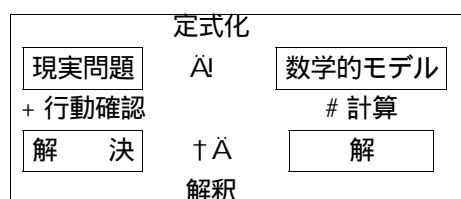


図 1.1: 銀林ダイヤグラム

数学を使った問題解決を例で考えてみましょう。あるとき小学校の3年生の男の子のママさんがきのう8枚のクッキーがお皿の上にあったのに、5枚しかのっていないことに気がつきました。これは、うちの真也君がこっそり食べちゃったんだなと思います。さて、どうしましょう。ここまでが、問題です。誰かさんが食べた枚数を x 枚とおくと、 $8 - x = 5$ などとなるわけですが、この方程式がこの図式でいうところの「数学的モデル」です。この方程式を解くまでもないでしょうが、右

^[9] 銀林 浩(監修), 1984 『算数・数学教育の最前線』(明治図書) p.13

半分の数学的世界で計算を行って数学的モデルの解を求めます。3枚食べちゃたわけです。真也君のお腹の調子と、日頃の行動からしてありえないことではありません。さて、このあとは？お夕飯は6時で大丈夫かしらとか、2階にいる真也君に歯を磨いたか聞きに行くか、なあんだ、せっかくシュークリームを買ってきてあげたのにとか。ま、いろいろなことがありえるでしょうね。

あえて、雑多なことを細々書きましたが、左半分の「現実世界」の問題を、抽象して数学的モデルを作って数学的に扱いやすくして、計算を実行しその解を得て、その解を解釈することによって現実世界の問題解決に資しているのです。これも数学の面白さのひとつです。数学の応用問題でさえも、この雑多な部分がなくなっていますから、計算問題なら推して知るべしです。この現実世界と数学的世界の相互交通が弱くなっています。数学が形骸化しているのです。大学の後半ならまだしも、中学・高校での数学にとってはその現実感の喪失は危険なことと言わざるを得ません。そして試験に出るから、あるいは、教科書に書いてあるからという目的の置き換えによって、授業のなかの数学はこのような危険にさらされるのです。より重要な問いは、むしろなぜ教科書にかいてあるのだらうということの方でしょう。

【 問題 】

1. ここで紹介した「銀林ダイヤグラム」は、私が初めてこの図式を読んだ本^[10]の著者にちなんで命名しましたが、いろいろなバリエーションを考えることができるでしょう。「現実世界」と「数学世界」という名であっても、どちらも数学のなかにある場合もありえるでしょう。解析幾何^[11]をどのようにこのような図式で説明することができますか？
2. もう一つのバリエーションとして、
片桐重男,1988『問題解決過程と発問分析』(明治図書)
にある図式をあげることができます。この図式とどこがどう違うのでしょうか。
3. 次のページには、4章で使う予定の方眼紙が入れてあります。これを TEX を

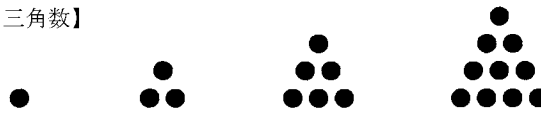
[10] 銀林 浩,1982『人間行動からみた数学』(明治図書)

[11] 栗田 稔,1981『幾何』(共立出版:教職教養シリーズ 基礎編2) p.3

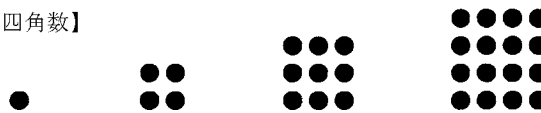
使って書くための T_EX ソースを考えてみてください。

図形数

【三角数】



【四角数】



n 番目の三角数を $T(n)$; 四角数を $S(n)$ とおくと、

$$T(n) + T(n-1) = S(n); \quad 2T(n-1) + n = S(n)$$

p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p

Chapter2

未知数としての文字

2.1 表象に関する発達

前章の銀林ダイヤグラムの助けを借りながら、現実世界と数学的世界の関わりを考えてみましょう。この図式はうまく数学を使った状態をあらわしているのですが、必ずしも人々は数学をうまくは使えないということが問題となるでしょう。

ブルーナは、表象作用の発達として次の表象の3段階を考えました。動作的(enactive)、映像的(iconic)、象徴的(symbolic)^[1]です。電池と電流計と豆電球とをつなぐことをあらわすのに、実際にその絵を描いてしまうことと、電池や電流計を記号であらわして配線図をかくこともあるでしょう。そして、もっと略して、[検波回路] - [増幅回路]などとブロック図を描くこともあるでしょう。これらの3つに対応しています。あとになるほどかきやすいので、楽であると思えます。ブルーナは、発達に応じてあとのものができるようになってレパートリが増えることを指摘しました。

次に紹介するある小学校1年生が足し算をわかったエピソード^[2]は、示唆に富むものです。

小さな丸を3つ並べ、その下に同じような丸を4つ並べてかき。「ここに3、ここに4だろう。全部でいくつ？」とたずねると、しばらくだまってみていて、「この丸はなあに？」と聞くではないか。あわてて、「こ

[1] J.S. Bruner, 1966/岡本夏木他(訳), 1968 『認識能力の成長』(明治図書) 上 pp.23-24

[2] 佐伯 胖, 1986 『コンピュータと教育』(岩波新書) pp.115-116

の丸はおまんじゅうだよ。おまんじゅうが3個と4個あって、あわせる
といくつになるかということだよ。」とやってやるとそうか、とやって、
「1、2、3、4、5、6、7」と数え、「7個だ」といってにっこりわ
らった。「じゃあこんどは自分でやってね。丸の絵をかいていいよ。は
い、4たす2は？」とたずねると、…(中略)…なんと、ていねいにおい
しそうなおまんじゅうの絵をかきこんでいる。…(中略)…こんなこと
ではちががあかないと心配していたが、しばらく同じような問題をやら
せていくうちに、小さな丸を簡単にかくだけですませられるようになって
いた。

Enactive から iconic へを表象をうつすのには、発達ももちろんのことですが、その
アイコンの実体を実感させるための経験と、面倒臭さからより簡略な表現への欲求
が原動力となるといえるでしょう。

このことからわかるように、数学で使われる表象はその抽象性が操作を容易に
させる価値を持ちます。しかし、それを表象として機能させるのには、それほど容
易ではない。ですから、このことを充分頭においた指導が教育場面で必要となると
いえます。

2.2 榊プラン

前章の銀林ダイヤグラムを完成形と考えましょう。でも、このダイヤグラムに沿っ
た行動をすることはそれほど容易ではないことを前節で申しました。特に発達の途
上においては。しかし、その困難さをバイパスを設けることによって克服し、積極
的に発達を支援するプランが未知数としての文字の導入にあります^[3]。

授業者は、まずサランラップにぴったり包んだ2種類のキャラメルをもって教室
に現れます。チェルシー1個の重さをぴったり当てたらそのつつみの中身が賞品に
なると告げられて、授業がはじまります。天秤を使って、チェルシー4個とヤング
チューイ2個のつつみ(Aセット)とチェルシー2個とヤングチューイ5個のつつ
み(Bセット)との重さが等しいことが次に示されます。これでも、まだ情報が足
りない。では、ヤングチューイ1個は、40g。1時間目は、ほとんどキャラメルの箱

^[3] 銀林(監修), 榊 忠男 1979『たのしくわかる 中学数学の授業 [2]文字と式』(あゆみ出版)

の実物が使われます。

次の時間は、「ヤ」とか「チ」とか書いた箱とか、ノートやマジックの絵とかをその個数だけ書くという方式。

さらに、次の時間は、箱の中に数を隠して当てさせる班対抗のゲーム。箱をその個数分だけ黒板に付けたり書いたりはだんだん面倒になるので、箱にその係数を書く方式。箱をぺっちゃんこにしてカードにする。そのままではさみしいから x とかく。と、きめこまかに抽象化して行って、カードの操作と方程式とを関連づけます。カード化によって移項も視覚化できるとのこと。理論ときめこまやかな実践とがうまく融合したプランと言えるでしょう。

2.3 記号論からみた教具

このような教具の系列をみるときに、大いに参考になるのが、松下佳代さんの教具論です。教具を数学的世界と現実的世界とを結ぶパイパス^[4]として位置付け、半具体物と呼びました。

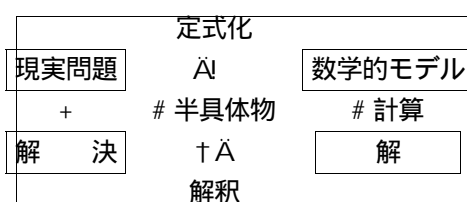


図 2.1: 半具体物の意義

上の榊プランをみると、この「半具体物」の過程が

現実世界の具体物 Δ 準具体物 Δ 半具体物 Δ 数学世界の表現

とでも言うようにさらにわかるように思えますが、松下さんは記号論を援用して、「数字記号の内容面（数概念）と統辞体系（10進構造）の両方を表現するが、例えば面積シエーマは数字記号の統辞体系のみしか表示しえない」と、

^[4]前に紹介した 銀林 浩,1982 『人間行動からみた数学』（明治図書）の第7話などにも説明があります。

単語に相当する表象と
文法構造（統辞体系）と
を半具体物が表現しているかに注目しています^[5]。この指摘は次の章で他の教具
の具体例を増やしてから利用したいと思います。

【 問題 】

1. 連立方程式 $2x + 3y = 8$; $2x + y = 4$ を準具体物を用いて解くとき疑似代入法とでも言えるような解きかた^[6]が出現する場合があります。これを参考にこの時期には問題を提示する順番についてどのような工夫をするべきか考えてみて下さい。

[5] 野中佳代「タイルとブロック」雑誌『教育』（'86・7月号：No.468）所収。

[6] 正田 良,1989『DIME 授業書による楽しい数学』（明治図書）p.39

Chapter3

関数の導入

DIME プロジェクトとは、スコットランドの草の根の教材開発、Fife Project の後身にあたるもので、就学前からだいたい中学校までの数学に関する授業書や教具によって構成されています^[1]。ここでは特に関数の変数として文字の導入を行う Number Patterns などを中心に、前章で提起した「教具論」での半具体物の系列を見てみましょう。

16ページにこの授業書の一部^[2]を紹介します。ページをめくってみてください。これを個別指導で使うとしたら、

さて、牧場に柵を作りたいんだけどね。柱を1本立てる。これだとただの柱で柵とは言い難いけど、柵の一種とみとこう。板はいらない。つまり、板は0枚必要というわけだ。(「1 A! 0」の部分指さす。) じゃあ、柱を2本立てると? 次の図だね。板は何枚必要かな? …… そう。3枚だね (1 A! 3)。じゃあ、次は? あっここに書いてあったか。6枚だ。じゃあ、柱が4本だと? …、うん、数えればわかるね。9枚だ。次の柱が5本だと? 今度は図を自分でかく必要があるかな? そうそう、12枚だね。じゃあ、12本の柱を立てるとすると? …… 33枚? えッ君、どうしてそれがわかったの?

と巧妙に、A! の左側の数から、右側の数をどうやって出したか説明を子どもに

[1] 正田 良, 1989 『DIME 授業書による楽しい数学』(明治図書)

[2] University of Stirling, Geoã Giles, 1984 “ Number Patterns 1 ”(DIME Project) p.3

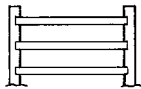
Building a fence

3

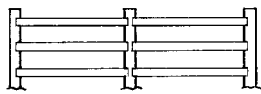
1.



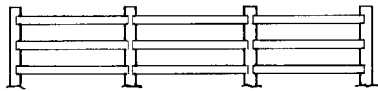
Number of posts Number of rails



1 → 0



2 → 3



3 → 6

4 →

5 →

12 →

101 →

2. Explain in words how to get the second number from the first.

3. The whole mapping is given by

$p \rightarrow$

図 3.1: DIME 授業書の Number Patterns より

させるでしょう。そして、「1を引いてから3倍する」を、左側の数を p という文字で表すとすると、右側の数はどのようにかけるでしょうと、文字式の導入が図られます。そのようなリズムが感じられる授業書です。

このような問題が、10 ページ続きターゲットテストの標準、上級とあり、さらに問題を補充するための “Number Patterns 2” もありますから、かなりたっぴりと練習問題が用意されています。このように多くの同じような問題を手掛けるなかで、子どもはあるコツをつかむこともあるでしょう。このごろの日本の中学用の検定教科書でもこのような文字の導入を行うものがありますが、用意されている問題の量にはかなりの違いがあります。

そして、18ページ^[3]を見てください。これまでみてきたような数の対応関係を自動的に計算するという便利な機能を持つ機械^[4]が登場します。見開きの左側の機能は、「1を引いて3倍する」でしたが、ここでは、「2倍して5を足す」という機能が扱われています。これは、「2倍する」という機械と「5を足す」という機械とをつなげたような機能を持っています。

この機械を表している箱をかきうつそうとしてみてください。数の入り口、出口を含めて、立体的に丁寧にかいてあるので、これを何個もかかないとならないとなると、ちょっと頭が痛いですね。そこで、「旗の図」(flag diagram)が登場します。この旗の図は、機械を表していた箱 (Number Machine) にくらべて、かきやすいことその他、関数の合成や、逆をあらわしやすくできています。逆をあらわすときは、旗を裏返しにするのです。表に $[\times 2]$ とかいてある旗は、裏には $[\div 2]$ とかいてあるのです。

「靴下をはいてから靴をはく」の逆は？ そう、「靴をぬいでから靴下をぬぐ」です。動作の順も逆になります。この旗の図を使うと、左から右へ旗の下を通して数が変換されて行きます。逆写像は向きが反対に右から左に、逆向きになびいている旗の下を通ることになりますから、自然に動作の順序も逆であることが示されています。関数に関する統辞体系を考える際に、合成と逆は重要な要素ですが、これを表しえる表象であると「旗の図」を評価することができるでしょう。

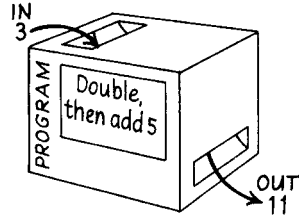
一般的には関数は代数での「乗除先行」などの規約に合わせる必要があるため、式

[3] University of Stirling, Geoã Giles, 1979 “Operations 1” (DIME Project) p.2

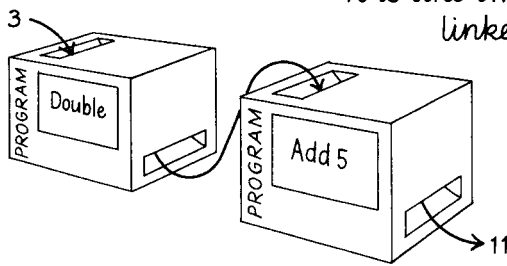
[4] さまざまな対応関係を関数として抽象するのに、このような箱の形をした機械は有用です。

2 Double flags

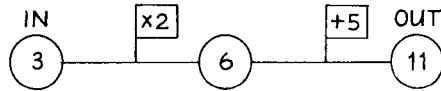
This number machine has a more complicated program.



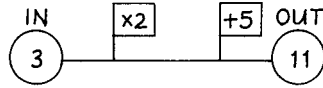
It is like two machines linked together.



Its flag diagram is drawn like this,



or like this.



For each of the programs on the worksheet fill in the operations on the flags. Then complete the circles in all the flag diagrams.

図 3.2: DIME 授業書の Operations より

であらわすこととなると、括弧を付けるなどの工夫が必要になります。しかし、旗の図はそれに至るまでのクッションとして機能し、関数の統辞体系を自然にあらわす特徴があるでしょう。

【 問題 】

1. DIME 授業書での関数は次のような系列で指導されます。

いろいろな数の対応関係 \hat{A} NumberMachine をあらわす箱

\hat{A} 旗の図 \hat{A} 代数を用いた表現

このそれぞれについて、目で見えた姿の類似性と、統辞体系を表現しうるかとを比較してみてください。

2. 前章の榊プランでも同様の比較をしてみてください。
3. またも、次のページを T_EX を使って書く方法を伺います。
4. Post Scale というポケットに入る「はかり」があります。これを使って封筒の中に 10 円玉が何枚入っているかを当てる授業を考えましょう。2,7,5 枚が入っている場合のデータを子どもに与えます。

このことを通じて「グラフ」の果たす役割を考えて下さい。

5. 一次関数を教える際の指導の順番を上の授業を含めて考えてみてください。

p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p
p p p p p p p p p p p p

Chapter4

3 次元幾何

これまで、理屈っぽい話が続きましたから、ちょっとここで息抜きをしましょう。立体パズルをしましょう。工作用紙の半分もいないのですが、DIME プロジェクトで、その形から L と呼ばれている立体 2 つと、2cm を単位としたときの体積から 2 と呼ばれている立体 1 つ、そしてくさび¹の形の W を 2 つ作って下さい、次のページに展開図を示しますから、それを工作用紙にうつして、切り取ってセロテープを使って組み立てればできあがりです。その見取図も記しておきました。

ところで、20ページの方眼紙を横長にして使うと、見取図がかきやすいつてご存知ですか？よく、平行にかくべき線がブルブルになって、何かへたっぴに見えることって私にはよくあることです。でも、このような頂点にあたる点が既に打ってあるのでそれを見つけて定規で結べばよいのです。これを適当な枚数コピーしておけば、かなり便利に使えるはずですよ。10ページのは普通の方眼の頂点だけを打ったものですが、これは等測方眼紙とかアイソメトリー方眼紙とか言われるものの頂点だけを打ったものです。正三角形を平面に敷き詰めたものの頂点のみを打ったとも言えますね。立方体を輪郭が正六角形に見えるような位置から見ると、辺の長さそれぞれ等しく見えます。だから「等測」というのです。DIME ブロックの見取図を示しましたが、他の視角からみた見取図をかいて下さい。

LWW とか記してあるのは、L が 1 つと W が 2 つという意味です。文字の個数がブロックの個数をあらわしています。次の 20 の見取り図（等測図）であらわされ

¹ 英語では Wedge

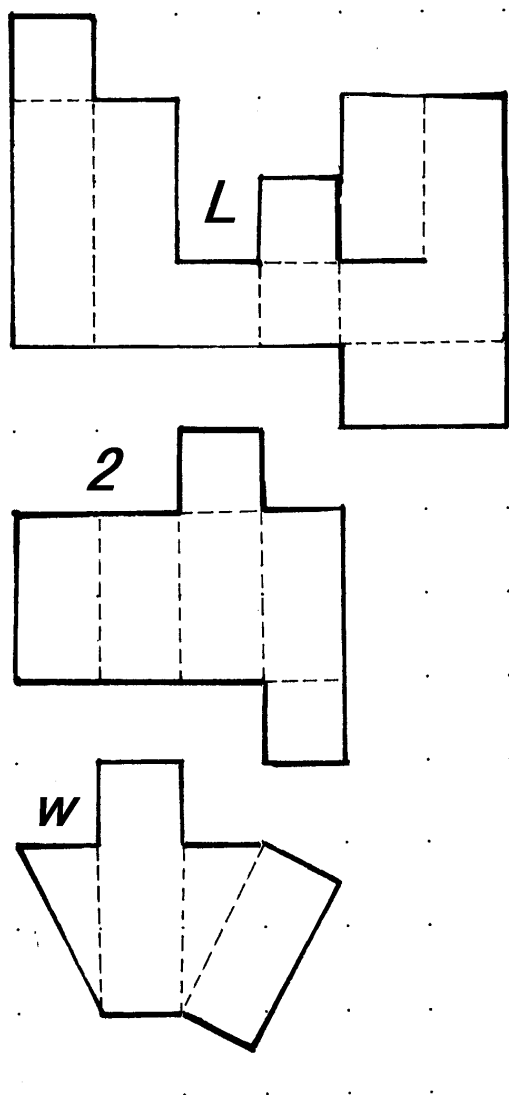


図 4.1: DIME ブロックの展開図

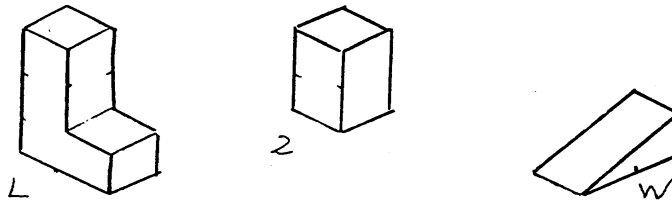


図 4.2: DIME ブロックの見取図

た立体を、先ほど作ったブロックを使って作ってみて下さい。【課題 1】^[2]

立体をあらわす方法として、真上からみた図(平面図)と、真正面からみた図(立面図)^[3]、の組であらわす方法があります。このような図を投影図といいます。ソーマ・キューブとか、スタインハウス・キューブとかの立体を調べ^[4]、投影図や等測図であらわしましょう。【課題 2】

投影図で、上に平面図、下に立面図を置く方法を第 3 角法といいアメリカで普及しています。逆に平面図が立面図の下になるのが第 1 角法といい、画法幾何学の創始者モンジュのとった方法です。日本では、工学部では第 3、理学部では第 1 が好まれるようです。ここでは第 3 角法を使います。

すこし複雑になってくると、投影図がどのような立体をあらわしているか読み取りにくい場合が出てきます。そのようなときには、面の高さを考えると考えやすくなる場合があります。右に記した

^[2]DIME プロジェクトでは、Tricube, Pentacube などの他のプロジェクトも含めて、これ以外の課題が多く用意されています。

^[3]ときには真横からみた図(側面図)

^[4]高木茂男, 1981 『PLAY PUZZLE パズルの百科』(平凡社) pp.68-69
銀林 浩, 1994 『実験数学のすすめ』(『数学教室』別冊(1): 国土社)

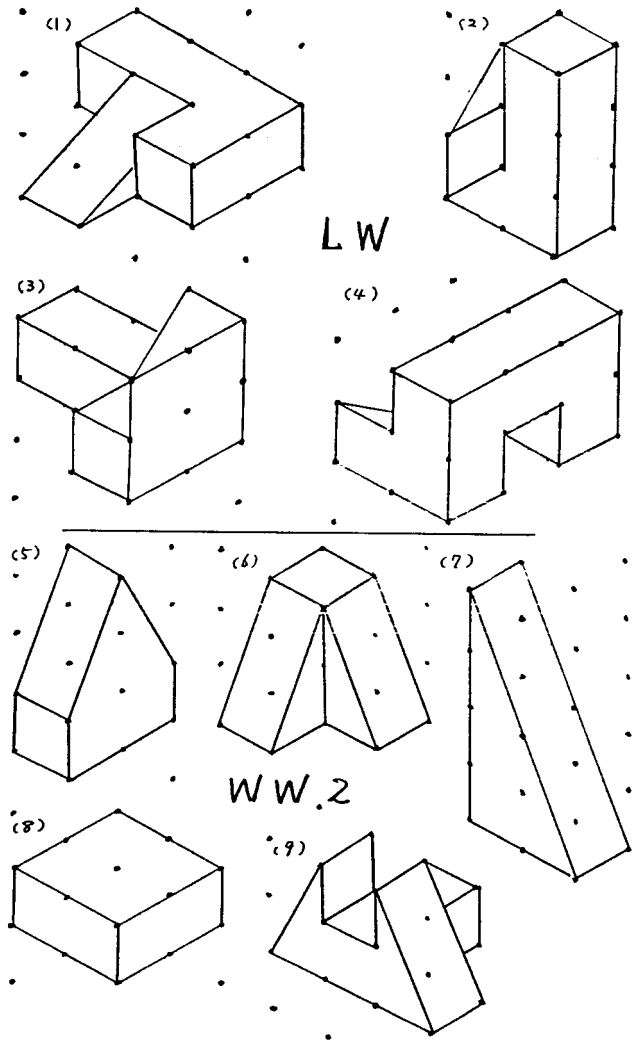


図 4.3: ブロックで作れますか?(その1)

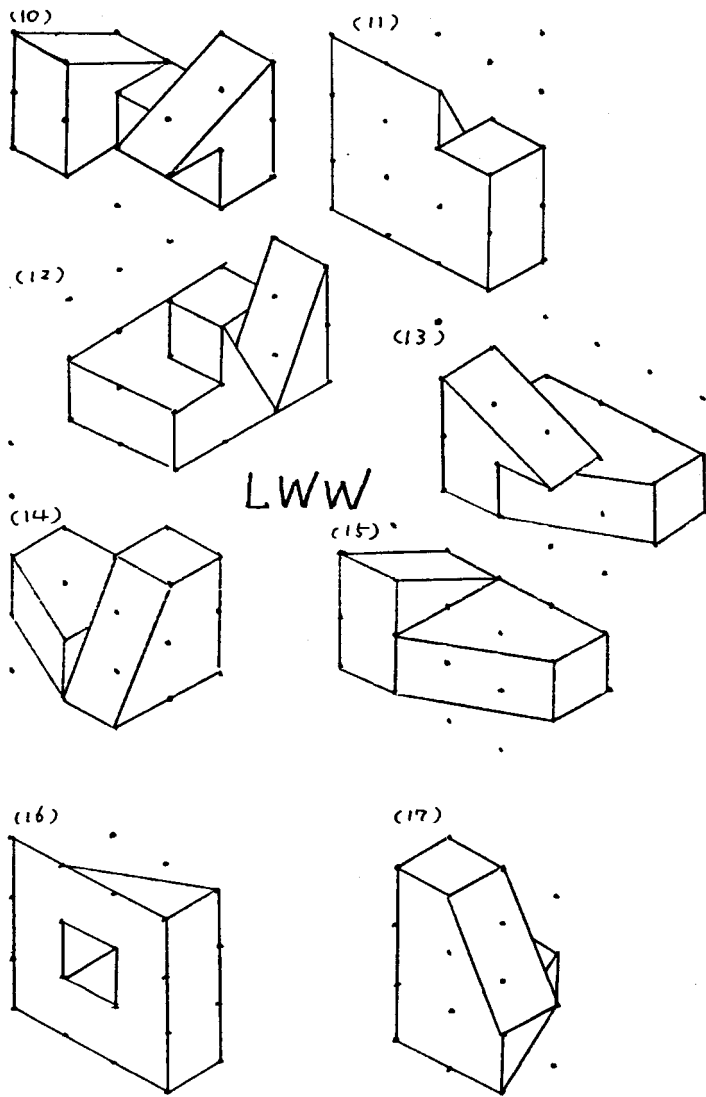


図 4.4: ブロックで作れますか?(その2)

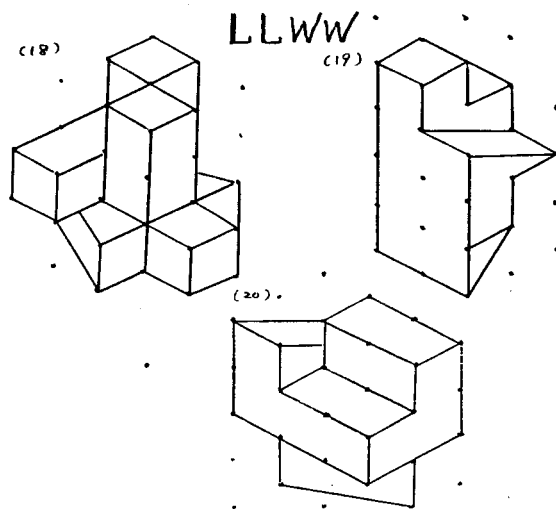
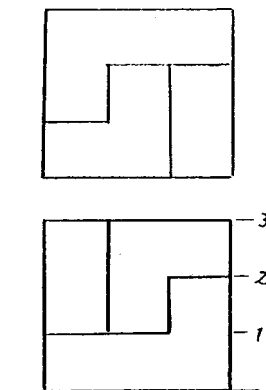


図 4.5: ブロックで作れますか?(その3)

投影図で立面図に記したように、高さ 3,2,1,0 を考えましょう。まず、平面図に高さ 1 である面に黄色を塗ってください。では、等測図に平面図にあたる図形をかきうつし、黄色で塗った面を対応する高さにかきいれてみましょう。次に高さ 2 の面を黄緑、高さ 3 の面を緑などと塗り分けていけば等測図がいくぶんかは書きやすくなるでしょう。



斜面がでてくると、等高線を引いたりどの方向に水が流れるかを示す線(最大傾斜線)を引いたり工夫も必要となります。その他に粘土で外接する直方体を作っておいて、対応する面に、立面図、平面図を貼ってナイフで削っていくという方法もあります。

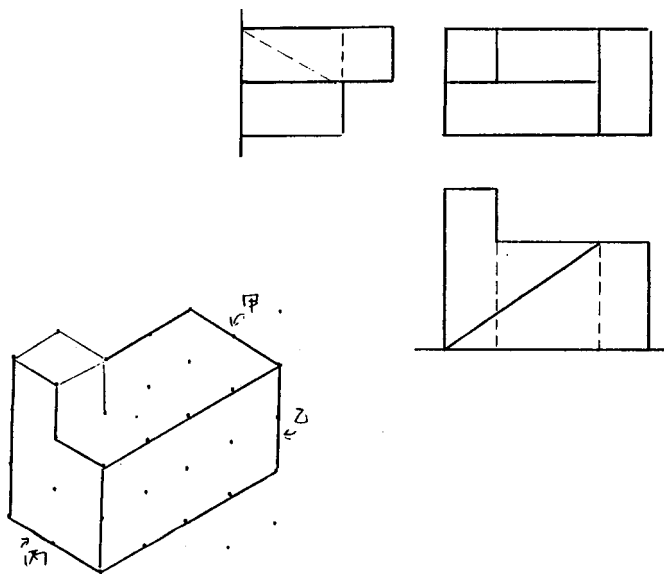
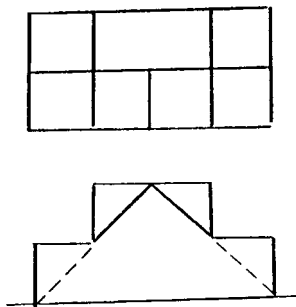


図 4.6: 面に図を貼ってからナイフで切り取る

さて、このように考えて来ると、等高線を平面図に書き入れるだけで、立体があらわすことができそうに思えてきますね。これまで、ノートに立体図形をあらわす方法のいろいろをみてきました。それらのまとめは演習問題に譲りましょう。

【 問題 】

1. 本文中の【課題 1】【課題 2】をやってみましたか？
2. 頂点に名前をつけて点の対応関係を示さないと平面図と立面図だけの投影図では立体をあらわせない例を、DIME ブロックの W を使って指摘して下さい。
3. いろいろな立体のあらわしかたについてみてきましたが、前章で扱った表象の抽象度について考察を加えてください。
4. 日本ではこのような三次元幾何のアプローチは中等教育ではあまりみられません。その是非について論じて下さい。
5. 下の投影図であらわされた立体を等測図であらわして下さい。



答は 36 ページにあります。

Chapter5

文字の特色

以前、関東地区数学教育協議会の研究会^[1]で「文字語のありがたさを教えるのは難しい」と題してお話ししたことをもとに数学での文字の特色について紹介したいと思います。

5.1 語の特色

上に紹介した書くのには大いに T_EX の技巧を要する演題ですが、「数学での文字」と聞いてピンときますか？ ちょっと通じにくいかなと思います。x とか y とか、そうそう方程式で未知数として使われるような「文字」のことです。むしろ、文字というよりも「語」というべきではないかということを話の枕にしました。

実際、数学での語は、一文字であることが多いですね。a² とか z₃ とか添え字とかの飾りをつけることもあります。高校の範囲では、log_a x; sin í とか $\frac{dy}{dx}$ とか出てきます。でも 1 文字であるというのは、数学が記号を使って計算とよばれる操作するもので、その操作を簡便にするという意味で注目すべき特徴であると思います。

「語」というのは、時枝文法という言葉ですが、ようするに単語のことです。では、「語」、つまりもの・ことのなまえはなぜ生まれるのでしょうか。

1. 繰り返して出てくるものごとに名まえをつけておいたほうが表現しやすい。

プログラミングで、ある部分をサブプログラムとして名まえを付けてそれを引

[1] 1996.11.23.

用するという手法がよくみられます^[2]。

2. おき直した方がひとまり感がある。

これは下記の引用、「カン詰めとピン詰め」^[3]を参照してください。

3. 話題となっている対象の個数が多いと「これ」「それ」では指示することに限界がある。

4. 計算の対象とみなしやすい。

小学校では、(道のり) = (速さ) × (時間) だけでなく、(時間) = …、(速さ) = … という式も公式としますが、中学では初めの式の両辺を同じ式、(速さ) で割って第2の式を出せます。しかしこのようなときには速さを v などとおいていることが普通です。つまり文字におくことによって、 v でわるなどの計算の対象としてみなしやすくなるのでしょう。

ざっとこのような特長をあげることができるでしょう。

【カン詰とピン詰】

(a + b) は a + b を一つのものとして扱う。という意味であって、しかも a + b を一つのものとして扱いながら、その内容は a と b との和を表わすことがわかるのであって、

一つのものとして取り扱いながらその内容がわかるというところに特長を持っているのであるが、a + b を m で表わして

$$m = a + b$$

としてしまえば、その内容は見えなくなってしまう。

そして、これをたとえば、鉛筆 12 本を一つのものとして取り扱うのに、帯封をして、これを 1 ダースとして名付けて取り扱えば、その内容がわかり、しかも一つのものとして取り扱えるので便利であり、面白味があるが、これを紙で全体を包んでしまえば、一つのものとして取り扱うことはできるが、その内容の見えないところに不便を感じる。……

^[2]例えば、正田 良,1994 『プログラム言語としての Arago dBL』(啓学出版) pp.61-70

^[3]藤森良夫,1957 『代数の基礎 学び方考へ方と解き方』(考へ方研究社) pp34-36

任意の代数式を、 $A; B; C; \dots; P; Q; \dots$ で代表させて、その関係をわかりやすくして、思考と計算とを節約することはすくなくないのであって、これから学ぶ式変形の諸例を通して「カン詰」は中身がみえないので不便であるが、丈夫であるので運搬に便利であることをしゃぶりだし、したがって、式変形における「カン詰」、「ピン詰」の使いわけ方をつかむことによって、諸君の計算力をいやがうえにも偉大にするようにしなくてはならない。

($(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 12) \ddot{A} 280$ の因数分解で、) 掛け算をするとき $x^2 + 7x$ のタバに眼をつけて、これをすなおに「カン詰」にして $y = x^2 + 7x$ とすれば、与えられた x についての4次式は、

$$P = (y + 6)(y + 12) \ddot{A} 280$$

という y についての2次式となり、……「カン詰」の利益は、第1：項の数を少なくすること。第2：次数を低めること である。

5.2 文字の難しさ

このような特長があるものの、算数・数学の場面で難しさが焦点化するところも文字なのです。

ある日、小学校5年生だった娘の勉強を見ていましたら次のような問題がありました。「みかんが8こありましたが、弟がいくつかお友達にあげたので5こになっていました。あげたみかんを x 個として式を作りなさい。」……しばらく一緒に考えて、 $8 \ddot{A} x = 5$ という「答」を出しましたが、娘は、「答え出さないでいいの?」と私に聞きました。もう1つの例。 $4a \ddot{A} a$ という計算問題は、「4」という誤答が比較的多く見られます。

このような難しさに対する対応については、これまでの章に記してきましたね。榊プランとDIMEプロジェクトでの文字の導入です。一般に文字の使われかたは次の3つに分けられます。

1. 一般的な定数を表わす文字
2. 未知の定数を表わす文字

3. 変数を表わす文字

$4a \dot{=} a$ を計算させて $3a$ を出すというのは、ともあれ2番目でも3番目でもないですから、一般的な定数を表わす文字ですね。 $4a \dot{=} a = 3a$ のような恒等式にでてくる文字は一般的な定数を表わす文字といえます。榊プランではキャラメルの重さについての方程式を解いていました。未知数として文字が出てきました。DIME では関数の変数として用いられていました。実は、文字の果たす意味合いを把握するという点では一般的な定数を表わす文字が3つのなかでは一番難しいと言えるでしょう。

5.3 課題分析と文字への意味付け

実はこれまでの教科書では、方程式や関数の前に「式の計算」という一般定数としての文字についての練習が課されていることが多くみられました。なぜこのような順番となっていたのでしょうか。

教育工学で教育順序を考えるネットワークを作るために「下位目標行動」という概念が使われます。例えば「平行四辺形の面積の公式を使えるには、少なくとも掛け算が出来る必要がある。」というようなものです。この意味でいうと方程式 $5x \dot{=} 8 = 3x + 2$ を解くためには、 $5x \dot{=} 3x$ を計算できることが必要なので、「式の計算」を教科書の初めにもってくる根拠があるように思えます。しかし、「分析者はとにかく、最初に思いついた必要値を絶対不動のもののように考えてしまいがちで、別のプロセスによれば全くちがったものが必要条件となるという可能性を見失う場合がある。」^[4]のです。

以前、教育出版の『教科通信』にも紹介したことがあるのですが^[5]、『中学校数学教科調査報告』という文部省が明治45年に発行した文献に次のようにあります。

教科書においてはその材料を系統的に取り扱うか、将又方法的に扱うかは教科書編纂上の問題にして、方法的に取扱ひたる教科書を用ふるときは(中略)、自由にして創造的なる教授活動の利益と特色とを發揮すること能はざるが故に、一般に優良なる教師の喜ばざる……

[4] 佐伯胖「ネットワークの方法」(沼野一男 編,1968『新訂 プログラム学習の実践』(悠久出版))

[5] 「文字の指導について」(1987.11.1)

ユークリッド原論の順番に代表されるような学問の「系統」と、授業のときの「方法」との対立が指摘されています。式の計算により関連の深い実例が次の文献^[6]に見られます。

定義が並べてあって、それから代数計算の器械的のものに移っていきまして、代数とは何んなものであるか、一向何等の考えも生徒に与えないから……代数においては先ず第1に代数は面白いものである、非常に重宝なものであるとの考えを生徒に持たせるのは必要なこと

しかし、一次方程式を先にするといっても「それで一次方程式をなるべく早く即ち加減乗除の次に」^[7]のような程度であったのですが。

機械的な計算とはいってもその中でも教育の順序があります。例えば小学校の筆算の系統について数学教育協議会は「水道方式」^[8]という実績を持っています。それを代数計算に当てはめようとする試みもあります。x という文字は、 $1x^1 + 0$ と隠れた指数と係数や項があるわけですが、この有無によって計算練習の系統が考察されています^[9]。しかし、実際には文字計算を明治期のようにまとめて教えることはないので計算体系をそこまで広げることは、あまり意味がないでしょう。5点式分類法^[10]として係数が0, ±1 のときの注意としては参考にするべきですが、指数については、むしろ次の指摘^[11]が影響をもっています。

代数の中には1元1次方程式から線形代数へ発展するものと、高次方程式へ発展するものがありますが、この2つの流れにしたがって……中学校ではとくに、1次式では内積 ($a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$)、高次式では指数法則 ($a^m \times a^n = a^{m+n}$) を中心に指導を考えることが重要です。……量の立場から考えても内積は量をバックにして量を結びつけて指導することができますが、……

では、「方法的」な順番とはどのようにして実現されるのでしょうか。すでに「半具

[6] 藤澤利喜太郎, 明治33『数学教授法講義筆記』(大日本図書)第13回

[7] 同書同回

[8] 前掲の『算数・数学教育の最前線』

[9] 松尾豊「文字計算の体系」(『数学教室』1960年7-12月号(No.70-76))

[10] 1, 2, -1, 0, 1, 2 と5種の係数は計算練習での扱いが違うことからこう命名された。

[11] 森毅, 1964『量の授業(中学校数学)』(明治図書)p.31

体物」としてその例を見てきましたが、よい意味での「領域固有性」というか、適用場面に大いに依拠した判断が利用できるでしょう^[12]

私は、I.R.S. 分析という手法を用いて教育順序についての調査を行ったことがあります^[13]。I.R.S. というのは、Item Relational Structure の略で、テストIとテストJとが同時に行われて下記の表のような分布となったとき、

	テストJを正答	テストJを誤答
テストIを正答	a 人	b 人
テストIを誤答	c 人	d 人

$$r = 1 - \frac{c(a+b+c+d)}{(c+d)(a+c)}$$

を「テストIからテストJまでの path がある」ことへの Fuzzy 論理値とするものです。テストをそれが学力を計測しようとする学習内容と同一視すれば、path が効率のよい教育順序を意味します。ところで、この式の分数の部分は、

$$\frac{\text{I をできないという条件のもとで J ができる確率}}{\text{J ができる確率}}$$

とみることができますから、I ができないことと J ができることが独立であるとき、r の値は 1、I ができることが J をできることの必要条件ならば、r の値は 0 となりますので、この 2 点では妥当な数値化であると言えるでしょう^[14]。なお、双方向の path が 2 つのテスト間にあるとき、両者を同一のものとみなします。

この調査ではテストがそのタイプの問題を代表しうるものであるかという吟味に欠けるので、追試が望まれますがここで指摘された path には、次のものが含まれました。

1. 「 $7x - 5 = 4x + 13$ を解け」から「 $x - 1 - (1 - 2x)$ を簡単にせよ」
2. 「 $7x - 5 = 4x + 13$ を解け」から「 $5(2x - 3y) - 3(3x - 2y)$ を簡単にせよ」
3. 「1冊 75 円のノートと 1冊 100 円のノートを合わせて 12 冊買ったときの代金は 1000 円であった。1冊 75 円のノートを何冊買ったのか。」から「1冊 120

[12] 認知心理学では、一般にはこの言葉は知識が他には利用できないという否定的な意味合いで使われる。伊藤・安西「問題解決の過程」(市川伸一, 1996『認知心理学 4 思考』(東京大学出版会))などは参考になる。

[13] 日本数学教育学会数学教育論究 Vol.43・44(1985)の論文発表会抄録

[14] $r = 1$ ですが、 $r = 0$ とは限らないので注意を要します。

円のノート 2 冊と 1 本 a 円のえんぴつ 8 本を買うときの代金の合計を式で表しなさい。」

4. 「1 冊 75 円のノートと 1 冊 100 円のノートを合わせて 12 冊買ったときの代金は 1000 円であった。1 冊 75 円のノートを何冊買ったのか。」から「連立方程式 $2x + y = 1$; $x + y = 4$ 」

ようするに、これらの path は古典的な課題分析とは逆の向きに引かれたのです。この意味では、「面白いものである、非常に重宝なものであるとの考えを生徒に持たせる」のは「必要なこと」であるばかりか効率のよい方法でもあるのかもしれない。作問についても調査を行ないました。

「 $4(2x + 10) + 3x = 1140$ という方程式をたてる必要のある問題を作れ」

という課題に対して、「ケーキ 2 つを 10 円の箱に入れてもらって」などと答えるものと、「ももはみかんの値段の 2 倍よりも 10 円高い」などと答えるものとは、前者よりも後者の方が代入法を好むという結果となりました。

小学校では、(単価) × (個数) の形にかきますが、中学校では(係数) × (未知数) となります。単価が未知数の場合も、個数が未知数の場合もあることとなります。こんな注意をしてから、「 $3x + 9 = 5x - 3$ という方程式をたてる必要のある文章題を作れ」と出すと、次のような人を使った^[15]問題も含めているいろいろなものが出て面白いし、生徒の文字に対する意味付けが強まり、誤答を防止することにもなるでしょう。

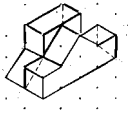
無責任な先生は 1 箱 3 人でおかしをわけるといったが、かわいそうに 9 人もらえない。よくばりな先生は 1 箱 5 人で分けると言い、3 人分余った、3 人分先生はどうしたかいまだ謎だが、果たしておかしは何箱か？

【 問題 】

^[15] 普通はおかしを人に配りますが、これは人をおかしに配っている点でユニークです。

1. 本文中に指摘した「式の計算」と「1次方程式」のように機械的な操作をそれが使われる場面の前にかなり長く練習させられるものを他に2つ中学・高校の数学からあげてください。
2. いくつかの現行の教科書に関して、因数分解はどのように導入されているか調べてみてください。

28ページの答え



Chapter6

練習の系統

よく数学の授業は楽だと言われます。教科書にかいてあることを読み上げて、そこに付いている例題をさらって、練習を生徒にあてて黒板に出せばいい。何の工夫もいらないし……というのが、その主張の論点なようです。

しかし、教科書にそってといっても、教科書に盛られたことをどれだけ理解して教えることができているかによって違いが出てきます。

6.1 二次方程式の解の公式

例題があって、問があって、練習問題があってという教科書の流れがあります。授業場面では、教師が黒板で説明。黒板に書きながらところどころ生徒にあてて答えさせる。プリントを配ってそれにある空欄を埋めさせながら説明する。生徒が授業時間にノートへ練習。生徒がうちでノートにやってくる。やってきたノートを提出させて添削する。生徒を黒板に出すなど。問題を解くのに生徒にどのような参加をさせるのかについていろいろな選択肢を考えることができるでしょう。

例題を教師が黒板で説明して、問をちょっと質問をしたりしながら、一緒にペースで教室で解かせて、練習問題を宿題にして次の時間に黒板に出して解かせるというのがある技能を練習させるときのおおかたの授業の進めかたです。しかし、教室の状態によってもっと練習が必要な場合があるでしょう。教科書の問題の順番について理解せずに、補足するにしても適当に係数をいじっておけばいいやというだけでは思わぬ結果になる場合があります。

例えば、二次方程式を $2x^2 + 4x - 7 = 0$ 解いてみてください。高校入試の問題としてみると、平方根の簡約や約分を行うことが要求されるでしょう^[1]。この問題は、そのすべてを含んでいるという点で例題として説明するのに適切な問題だといえます。

例えば、 $5x^2 + 5x - 1 = 0$ の解を $x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ などとってしまう誤答が多く出る^[2]ので、例題の中にも、分母・分子の共通因数をくくった途中をしっかりと注意をうながすことが必要でしょう。

6.2 因数分解

因数分解では教科書に種々雑多な公式が提示されることが多いようです。これは問題演習のときの公式集としても役立たせようという意図で平板に並べられているに過ぎません。それに軽重をつけて系統的に整理することが授業に望まれます。ここでは具体的に問題を解いてみましょう。

1. 次のそれぞれを因数分解^[3]し、その練習の系統を答えてください。

- (1) $x^2 + 7x + 10$ (2) $x^2 + 10x + 24$ (3) $x^2 + 7x + 6$
 (4) $x^2 - 14x + 24$ (5) $x^2 - 9x + 18$ (6) $x^2 - 7x - 8$
 (7) $x^2 + 5x - 24$ (8) $x^2 + 5x - 24$ (9) $x^2 - x - 6$
 (10) $2x^2 + 7x + 6$ (11) $3x^2 + 2x - 1$ (12) $3x^2 - 7x + 4$
 (13) $3x^2 - 10x - 8$ (14) $x^2 - 10x + 25$ (15) $x^2 + 4x + 4$
 (16) $4x^2 + 12x + 9$ (17) $x^2 - 36$

[1] 「これによってどんな2次方程式でも必ず解けるということを知らせるのが第1の眼目」と 矢野寛, 1995 『中学・高校における水道方式』(愛媛県数学教育協議会) p.24 にあるが、ここでは公立高校での採点基準程度の要求を前提として考える。

[2] $3x^2 + 6x - 5 = 0$ を解くのに、 $\frac{D}{4} = 2^2 - 6$ とおくと、 $x = \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$ となるというように、準公式 $ax^2 + 2px + c = 0$ $x = \frac{-p \pm \sqrt{E}}{a}$ (ただし $E = p^2 - ac$) を使えばかなりの約分から逃れることができます。

[3] 「タスキ掛け」と呼ばれることがあります。

2. 次のそれぞれを因数分解し、その教授意図を指摘してください。

- (1) $10x^3y + 15x^2y + 5xy$ (2) $4x^3 - 2x^2y + 6xy^2$
(3) $(a + b)^2 + 5(a + b)$ (4) $x^2 - 2xy + y^2 - 1$
(5) $x^2 + 4x + 4 - xy - 2y$ (6) $0:3y^2 + 0:4y - 1:5$
(7) $(x - 3)^2 + 5x - 15$ (8) $(a - b)^2 - (b - a)(a + 3b)$
(9) $2bc - a^2 + ac + 4b^2$ (10) $x^2 - xy + 3y - 9$

3. これも同様です。

- (1) $2(x - y)^2 - x + y - 1$ (2) $a^2 - 4a + ab - b + 3$
(3) $x^4 - 13x^2 + 36$ (4) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 4) + 3$
(5) $x^2(x + 2)^2 - 3(x^2 + 2x) - 4$
(6) $(a - b)^2 + 2(c + d)(a - b) - 3(c + d)^2$
(7) $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$ (8) $ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)$
(9) $x(x + 2) - y(y + 2)$ (10) $x(x + 4) - y(y + 4)$
(11) $a^4 + a^2b^2 - b^2c^2 - c^4$ (12) $1 + bx - (a^2 + ab)x^2$
(13) $1 - abx^3 + (b - a^2)x^2$

この解答は演習と同じく巻末に記すことにします。なお、最後の 3 . (7) 以降は明治当時の教科書^[4]からとったものです。

公式の中にはそのもの自体を暗記するよりも、「次数が最小になる文字についてまとめる」とか、「複数回出てくるものを文字でおく」もっと根本的なものをしっかり把握した方が有益なものがありそうです。

なお、タスキ掛けの導入として「ベキタイル」^[5]が使われることがあります。因数分解の意義を材料(展開された結果)を使って、長方形に並べる(因数分解された結果)という操作に対応させている点、因数分解の導入の困難さを逃れることができます。しかし、係数がマイナスあるいは端数ができる場合にはあらわしにくい。数の拡張については、展開の逆操作としてのタスキ掛けの定式化を待つて行うべきでしょう。

[4]長沢他訳 チャーレス・スミス氏初等代数学 明治 20 数書閣

[5]41ページ

・カルダノの公式に関する基礎知識

(1) 1の3乗根で虚数のもののうちの1つを ω とおくと、

$$\omega^3 = 1; \quad (\omega^2)^3 = 1; \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

(2) 因数分解の公式

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$$

は前項の ω を用いて、

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$$

と書ける。

(3) x についての3次方程式 $x^3 - 3pqx + (p^3 + q^3) = 0$ の解は、

$$x = \omega(p + q); \omega(p\omega + q\omega^2); \omega(p\omega^2 + q\omega)$$

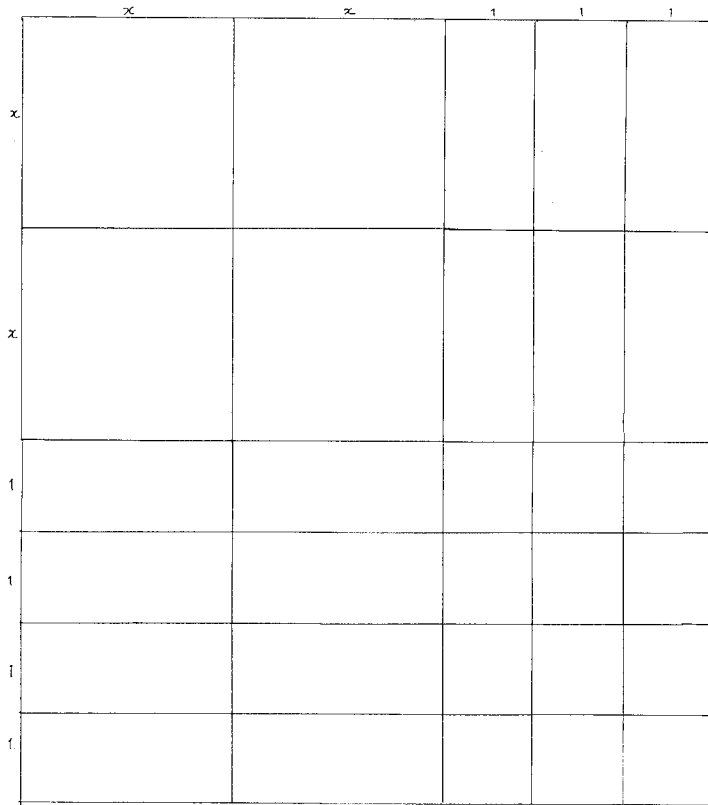
・デカルトの公式に関する基礎知識

4次方程式 $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ の左辺は、

$$(x^2 + kx + m)(x^2 - kx + n)$$

の形に因数分解できる。

代取託 5.2



上のような長さを与えられている。左上の面積 x^2 の正方形ばかり x^2 、長方形は x 、右下の正方形は 1 に合わせて。裏返し(赤)は $x(x+1) = x^2 + x$ とする。
 式と同じように x^2 6枚に x 1枚と 1 が3枚を $6x^2 + x + 3$ であわせる。
 次の木の原材料にどの組み合わせで長方形を作りなさい。

- (1) $x^2 + 6x + 5$ (2) $x^2 + 5x + 6$ (3) $2x^2 + 7x + 6$ (4) $4x^2 + 13x + 3$
- (5) $4x^2 + 8x + 3$ (6) $4x^2 + 12x + 9$ (7) $x^2 - 6x + 8$ (8) $x^2 + 4x - 12$

6.3 一次方程式

前の章で、「『方法的』な順番とはどのようにして実現されるのでしょうか。」と記しましたが、特に一次方程式に関してその回答を提供していませんでした。I.R.S. で課題分析と逆に思われる結果が出てきたのですが、それはなぜ起こり得るのでしょうか。「適用場面に大いに依拠した判断」と記しましたが、具体的な場面で式の計算を使わずに、 $3x + 50 = 5x \text{ \AA } 10$ をどのように解き得るのでしょうか。

代数記 1 たすき掛けによる因数分解.

教p.1には、展開・因数分解の公式として種々雑多な公式が列挙されているが、(3)は公式中では教わっていない二次三項式の因数分解、(4)は x^2 の係数が1以外の場合。どちらも「公式」を暗記するというよりも、技巧をマスターすべきものである。

1 因数分解とは何か?

例えは「 $3x^2 + 11x + 10$ を因数分解せよ」とは、

$$3x^2 + 11x + 10 = (\underline{ア}x + \underline{イ})(\underline{ウ}x + \underline{エ})$$

という穴埋め問題に他ならない。

2 候補を絞る

右辺を展開してみればわかるように

$$x^2 \text{の係数列} \quad \underline{ア} \times \underline{ウ} = 3$$

$$\text{定数項列} \quad \underline{イ} \times \underline{エ} = 10$$

なので、 $\underline{ア}$ は3の約数であり、 $\underline{ウ}$ はその余約数であることがわかる。また、 $\underline{イ}$ は10の約数で、 $\underline{エ}$ はその余約数である。

(注) a が a の約数であるならば、 $\frac{a}{a}$ も a の約数である。これを右に対応する a の余約数であるという。

候補は有限通りであるので、右をあてはめてまだ考慮していない x の係数の条件を満可か、試行錯誤であてはまるものを見出せば因数分解である。

(問1) この場合の候補としては何通りを考えますか?

図 6.1: たすき掛けの定式化の例 (前半)

3 右辺のかけ算の効率化

まず第1の係数として $p:1, q:3$ があてはまるか
 $r:1, s:10$

どうか調べよう。右辺 = $(x+1)(3x+10)$ となるのだから、
 このかけ算を実行するのには...

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= x(3x+10) + (3x+10) \\ &= 3x^2 + 10x + 3x + 10 \\ &= 3x^2 + 13x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3x+10 \\ \times \quad x+1 \\ \hline 3x^2+10x \\ \quad 3x+10 \\ \hline 3x^2+13x+10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 10 \\ \times \quad 1 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 10 \\ \quad 3 \quad 10 \\ \hline 3 \quad 13 \quad 10 \end{array}$$

↑
右の1は当然
↑

計算に使う図かき
 この技法をたすき掛けと呼ぶ

結局...

$$\begin{array}{r} 3 \times 10 \\ 1 \times 1 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \times 10 - 10 \\ 1 \times 1 - 3 \\ \hline 13 \end{array}$$

4 試行錯誤の効率化

$$\begin{array}{r} 3 \pm 10 \\ 1 \pm 1 \\ \hline \pm 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \pm 5 \\ 1 \pm 2 \\ \hline \pm 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \pm 2 \\ 1 \pm 5 \\ \hline \pm 17 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \pm 1 \\ 1 \pm 10 \\ \hline \pm 31 \end{array}$$

の4×2通りを
(符号同順)

調べて結局 $3x^2 + 11x + 10 = (3x+5)(x+2)$

- (注1) ±は符号と呼ばれ、 $\left(\begin{array}{r} 3 \quad 10 \\ 1 \quad 1 \\ \hline 13 \end{array} \right)$ と $\left(\begin{array}{r} 3 \quad -10 \\ 1 \quad -1 \\ \hline -13 \end{array} \right)$ 同順
- (注2) もしも上記4つのは第2のものか11と17なら第3・第4は不要である。【たすき掛けの結果について教訓は?】
- (問2) 実は符号のうち「 $-$ 」を考慮する必要はなかった何故か? また、 p, q の方に符号をつけたとしてもよい理由は?
- (問3) p と q の正整数だと問題として妥当か? 「 $4x^2 + px + 6$ を因数分解せよ。」

図 6.2: たすき掛けの定式化の例 (後半)

短刀直入にいえば、過不足算的状况であると思います。「みかんを3こ買おうとしたら50円あまるが、5こ買おうとすると10円足りないといわれた。さて、このみかんは1個いくらでしょうか。」このような文章題を解くには、線分図などを書いてもいいでしょう。2こ分の値段は、 $50+10$ の60円になっているわけですから、もとの方程式を $2x = 60$ と書き直すことができることになります。2こで60円なのですから、あとは単純な割り算の問題で、30円です。

【 問題 】

1. 3次方程式の解の公式、4次方程式の解の公式について調べてみましょう^[6]。
また、これらの公式で2次方程式の解の公式での方法が使われているものがあれば指摘して下さい。

[6] 矢ヶ部 巖, 1981 『代数』(共立出版: 教職数学シリーズ)

Chapter7

数論と代数的構造

7.1 基本法則の確認

2つのベクトル $a + 2b$; $a - 3b$ の内積、

$$(a + 2b) \cdot (a - 3b)$$

を計算してみてください。恐らく、1次元の実数をあらわす文字に関する式の乗法、

$$(a + 2b)(a - 3b)$$

を対応させて考えられたのではないのでしょうか。図式的に書けば、

$(a + 2b) \cdot (a - 3b)$!	$(a + 2b)(a - 3b)$
		#
$j a^2 + a \cdot b - 6j b^2$	+	$a^2 - ab - 6b^2$

のように。すでに習熟している技能を新しいものに応用するために、共通な構造に着目するという事は、数学の本質的な活動と言えるでしょう。

このための準備として、基本的な法則が実数と同様に成り立つこと、内積の場合は自乗にあたるものがベクトルの大きさの自乗に当たること。そして、ひとつかふたつ基本法則に従って実数と同様の変形ができることを確かめています。上の図式のようなことができることが目的であって、そこで見通しがパッと開ける経験がなければ、面倒な理屈ばかりが印象に残る授業になってしまうでしょう。

ベクトルの定義を、矢線で行う方法と、実数の組として行う方法とがあります。そのどちらに際しても、交換・結合・分配法則がなりたつことを確認することは重要です。でも、その重要性がどのようなものであるかを理解せずにただ教科書に書いているからという単純な理由で棒読みすることは、危険でさえあります。このような基本法則の確認は多くの場合退屈極まるもので、何のためにこんなことをするのかという疑問が恐らく生徒のなかにあるでしょう。ですからその時間の中に、確認できたから広がった、あるいは、やりやすくなった世界を見せてあげる必要があるように思います。

7.2 整数の性質

整数 M を自然数 N で割った商を越えない最大の整数を整商といいます。これを Q とおき、 M と QN との差 R を剰余といいます。即ち、 $M = QN + R$ 。 $M > 0$ のときこれは小学校の割り算の余りに一致しますが、マイナスのときにも余りを考えるようにしたものです。 $0 \leq R < N$ となっています。整式を整式で割るときの除法も同じように考えます。式では変数の値によって値が変わりますが、そのかわりに次数の大小で扱います。

ある自然数 N で整数を割ったときに何が余るかによって、整数を N 個に分類することができます。これを自然数 N を法とする剰余類ということがあります。 k 余る整数と l 余る整数との和を N で割ったときの余りを k と l との和、積を N で割ったときの余りを k と l との積と考えると、 0 から $(N - 1)$ の N 通りの要素からなる環となります。さらに N が素数のとき体となります。要素が有限個であるので、和や積を全部表の形に書き出すことができます。このような表を演算表といいます。我々は 10 進法の掛け算や割り算の筆算を難なくこなしますが、これは九九という乗法の演算表を頭の中に持っているからです。恐らく、 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{5}$ を 6 進法の小数に直すというのめかなり大変な作業になるでしょう。

整数の性質について文字を使っているいろいろと探求することには生徒にとって興味深いものがあります^[1]

[1] 野崎 (監), 1995 『数学の窓の開けかた』(東京書籍)に、「72の約数を並べると」「百五減算」が出ています。また約数の見分けかたなども適した話題と言えましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

7.3 ユークリッドの互除法

2つの自然数の最大公約数を求める計算方法として、いわゆる「タンス型」の計算方法があります。1989年の改訂で小学校と中3に別れましたが、これを小学校で教えてしまう先生も中にはいるようです。この「タンス型」は2つの数の公約数がすぐに見える場合はかなりの威力を発揮します。

タンス型の計算で混同しやすいのは、3つ以上の数の最大公約数を求める計算と、最小公倍数とでタンスの段の数が違ってきます。

$\begin{array}{r} 7 \overline{) 35 \ 154 \ 231} \\ \underline{5 \quad 22 \quad 33} \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \overline{) 35 \ 154 \ 231} \\ \underline{11 \overline{) 5 \ 22 \ 33}} \\ \underline{5 \quad 2 \quad 3} \end{array}$
---	--

ここに計算している 35, 154, 231 の素因数をベン図に書いてみてください。最大公約数、最小公倍数はそれぞれ何の積でしょうか。

パソコンなどでの計算には、いろいろな約数の見分け方を組み込むよりも機械的な繰り返し計算が有利です。ユークリッドの互除法というアルゴリズムはその繰り返し計算が単純な上に効率がいいので便利です。実は互除法は算法の典型とされていて、互除法を示す「アルゴリズム」という言葉が算法を示す言葉になってしまったというほどです。さて、どのような算法でしょうか。

168 と 448 の最大公約数を求めるとは、横 168cm, 縦 448cm の長方形の形をした部屋に、なるべく大きいタイルを切らないで敷き詰めたい。タイルの1辺は何cmにするべきかという文章題を解くことと同じです。

そこで、まず一辺の長さが部屋の短い方の辺、つまり横の長さと同じである正方

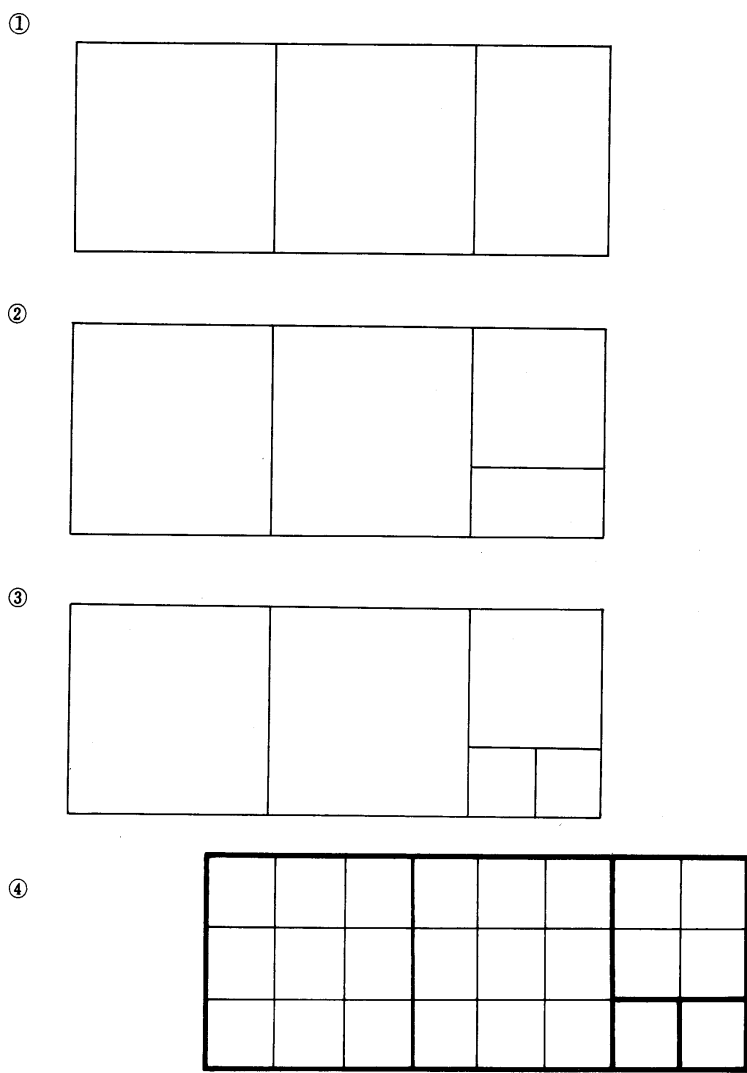


図 7.1: ユークリッドの互除法

形がいくつ入るか入れてみます。もちろん端が余ってしまいます。余った部分も長方形ですから。この長方形の短い方の辺を一边の長さとする正方形を考えて、これも入るだけ入れてしまいます。このようにして続けていけば、余りの長方形がどんどん小さくなっていきます。値が整数なので1未満にはならないのでいつかはぴったり敷き詰められる正方形が見つかります。

こうして得られた正方形の一边の長さは、初めの長方形の二辺の公約数であることがわかります。しかも、実は最大公約数であるのです。

2つの自然数 x, y の最大公約数を $\text{gcm}(x; y)$ であらわすと、 $a = bq + r$ のとき、

$$d = \text{gcm}(a; b); e = \text{gcm}(b; r) \quad \text{とすると } d = e$$

であることを示せば、余りを考えるという操作を繰り返しているので、この計算結果と最大公約数が一致していることを示したことになります。

$r = a - bq$ なので、 r を d で割ると、 a を割っても、 b を割っても割り切れるので、 r も割り切れます。 d は、 r と b との公約数です。 e は最大公約数なので、 $e \mid d$ 。

同様に、 $a = bq + r$ なので、 e は a と b との公約数ですから、 $d \mid e$ 。 $e \mid d$ と $d \mid e$ とが同時に成り立つのですから、 $d = e$ です。

なお、 a, b の最小公倍数を、 $\text{lcm}(a; b)$ 、最大公約数を、 $\text{gcm}(a; b)$ であらわすと、

$$ab = \text{lcm}(a; b) \cdot \text{gcm}(a; b)$$

が成り立ちますからユークリッドの互除法の結果を使って最小公倍数を求めることができますし、3つ以上の数については、

$$\text{gcm}(\text{gcm}(a; b); c) = \text{gcm}(a; \text{gcm}(b; c)) = \text{gcm}(a; b; c)$$

$$\text{lcm}(\text{lcm}(a; b); c) = \text{lcm}(a; \text{lcm}(b; c)) = \text{lcm}(a; b; c)$$

が成り立つ^[2]ので、次々求めていけば所定の結果に到達します。

139ページの T_EX ソースです。

^[2] $a = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots$ などと素因数分解の結果を表示すれば最大や最小が結合法則を満たしていることから示すことができます。

```

\documentstyle[b5j, bezier]{jarticle}
\begin{document}
\unitlength=1mm \label{bezier}
\begin{picture}(106,106)
\linethickness{0.9mm}
\bezier{1000}(3,3)(53,3)(103,103)
\linethickness{0.5mm}
\put(3,3){\line(0,1){100}}
\put(3,3){\line(1,0){100}}
\put(103,3){\line(0,1){100}}
\put(3,103){\line(1,0){100}}
\linethickness{0.1mm}
\multiput(3,13)(0,10){9}{\line(1,0){100}}
\multiput(13,3)(10,0){9}{\line(0,1){100}}
\end{picture}
\end{document}

```

【 問題 】

1. 内積の計算として、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を計算してみましょう。これが余弦定理に相当することを確かめてください。
2. 矢線としてベクトルを定義した場合、加法と内積での分配法則が成り立つことを説明するには、厳密には三垂線の定理が必要となります。どこで必要になりますか？
3. A, B が 2 次正方行列のとき、 $(A + B)^2$ を計算してください。
 一般に、 $(A + B)^n$ は、係数がすべて 1 の 2^n 個の項になります。 A, B が可換³いくつかの同類項が生じますが、その個数を考えることによって二項定理を得ます。同様に多項定理を考えることができます。例えば、 a, b, c が実数の値をもつ文字で、 $(a + b + c)^5$ を展開したときの a^2bc^2 の係数は何でしょうか？
4. 関数の合成を演算としてみて下記の 2 つの関数をその要素として含む演算表を作ってみましょう。演算の結果をまた要素として含むもののうち要素の数が

³ $AB = BA$ が成り立つこと。

最小であるものの要素を全部あげてください。

$$f_1(x) = \frac{1}{x}; \quad f_2(x) = 1 \dot{\wedge} x$$

5. 四元数について調べてみましょう。実数部分が 0 である 2 つの四元数の積の実数部分は、もとの四元数に対応する 3 次元ベクトルの内積で、虚数部分は外積に一致します。
6. 正の実数に対して「2 つの数の大きいほうを採る」を加法、「普通の意味の加法」を乗法とする変わった演算について注の文献を調べてみましょう^[4]。
7. スピログラフ^[5]について、調べてみてください。

[4] 鉄道の最短経路などに有用な応用がある。森口繁一, 1978 『応用数学夜話』(日科技連) 第 18 話

[5] 例えば上掲の『数学の窓の開けた』 pp.18-23

古来、純正律は和音のきれいな調律法として知られていた。これは音の周波数が比較的簡単な整数比となるので、きれいに響くのである。もっとも古代では周波数を測る手だてはなかったが、弦の長さに反比例するものとして観測可能であった。

階名	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
周波数の比	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

しかし、これでは（ドとレ）の間の周波数の比に比べて、（レとミ）の間の周波数の比が狭すぎて、移調することができない楽器となってしまう。そこでピタゴラスは、全音の間は、8 : 9と一定にして、半音となっている（ミとファ）（シとド）を互いに同じ比ではあるが、少し狭めにとる調律法を考案した。これをピタゴラス音階という。しかし、これは、ドとミの和音の響きがかなりきたなくなってしまう。

そこで、全音をちょうど半音の2倍の広さにとって、1オクターブを12等分したものを半音とする調律法が考案される。これを平均率という。この平均率の成立に関しては、注目すべき研究があるが、ここではこの3者の下のドを周波数比の基準1.000としたときのそれぞれの周波数にあたる比の値を比較してみよう。

なお、 $2^{\frac{1}{12}}$ を連分数表示したときの、第1次近似分数は、[1,8] すなわち、 $\frac{9}{8}$ に一致する。

Chapter8

数の拡張

8.1 自然数とは何か

19世紀末には、数学の基礎付けがはまりました。ヒルベルトが『幾何学の基礎』(1899)をあらわし、デデキントの『数とは何か』(1888)、ペアノの『数の概念について』(1891)^[1]が出ています。ヒルベルトはユークリッド幾何で「点・直線・平面」を定義していたのを改めて、「次の公理を満たすもの」として一連の公理を述べることによって定義に変えたのです。いわゆる「無定義術語」として扱った訳ですが、この体系によれば、普通の意味での「点」ではなくても公理さえ満たしていれば、同じ性質が得られます。例えば、「点」を「平面」に、「平面」を「点」に読みかえたとしても公理は成り立つので、例えば、「チェバの定理」と「メネラウスの定理」のように互いに双対性があるものは、一方が成り立てば他方も成り立つことがわかります。また、「点」を3つの実数の組、「直線」を2つの三元連立一次方程式、「平面」を三元一次方程式を読みかえるのは、解析幾何に他なりません。このように公理を満たしていればその対象が全く別のものであっても結果が応用できることになりま。このような目的で公理にさかのぼってもとになる前提がどのようなものかはっきりようとする考え方を「公理主義」と呼ぶことがあります。この主義はともすると「記号化された数学を対象とし記号式の運用によって無矛盾性の証明を導こうとする」^[2]という「形式主義」になります。

[1] 共立出版が『現代数学の系譜』と題したシリーズで翻訳を出しています。

[2] 村田 全他,1975『数学史』(筑摩書房 数学講座 18) p.510

ところで、前の章で「交換法則」「結合法則」「分配法則」などが出てきましたが、これらの「法則」は「定理」なのでしょうか「公理」なのでしょうか。実は自然数の加法と乗法に関しては、次のペアノの公理から導かれる定理であるのです。

- (1) 1 は自然数である。
- (2) a が自然数ならば、a の後継者 a' も自然数である。
- (3) 1 はどの自然数の後継者とはならない。
- (4) $a' = b'$ ならば $a = b$ 。
- (5) 集合 K が 1 を含み、その任意の要素 x とともにその後継者 x' を含むならば、K はすべての自然数を含む。

彼は敢えて要約すれば、数学的帰納法^[3]が成り立つものとして自然数を定義したのです。

8.2 演算について閉じていること

自然数 N は減法について閉じていませんから、

$$Z = \{m - n \mid m, n \in N\}$$

と整数へ数を拡張し、さらに除法についても閉じたものとして、

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N \right\}$$

と有理数へと数を拡張しています。しかし、二次方程式の解を考えるのにはそれでも不十分であって、例えば $\sqrt{2}$ などのように有理数ではないものも存在していますし、さらには複素数を考える必要もありました。しかし、ガウスの代数学基本定理によれば、二次方程式のために拡張した数の体系は、より高次の代数方程式にとっても十分で、n 次方程式には、重複度を考慮に入れれば複素数の範囲で n 個の解を持ちます。

以下、記述を簡潔にするために問題の形で記します。

[3] 17 世紀のパスカルに明確に意識されていたと、上掲書の p.222, p.492 にあります。

1. 自然数が加法、乗法について閉じていることを利用して、5の倍数^[4]
 $N_5 = \{5n \mid n \in \mathbb{N}\}$ も加法、乗法について閉じていることを示せ。
2. 前問の N_5 について、 $m \in N_5; n \in N_5$ であるにもかかわらず、 $m + n \notin N_5$ となる、 $m; n$ の例を1組あげよ。
3. 本文中に述べたように整数を定義する。0が整数の集合の要素として含まれていることを示せ。また、 n が自然数のときに $-n$ が整数であることを示せ。
4. 整数が加法について閉じていることを示せ。また、有理数が加法について閉じていることを示せ。
5. $x^2 = 2$ の解のうち正のものを $\sqrt{2}$ とかく。これが、有理数ではないことを示せ。
6. $m; n$ が整数で、 $m + n\sqrt{2} = 0$ のとき、 $m = n = 0$ であることを示せ。
7. $\{m + n\sqrt{2} \mid m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\}$ の要素 $x; y$ を考える。 $x = a + b\sqrt{2}$ で、 $x + y \in \mathbb{Q}; xy \in \mathbb{Q}$ であるという。 y を $a; b$ を用いてあらわせ^[5]。

8.3 正負の数

マイナスの数は中1で導入されます。形式主義の立場からすれば、公理が無矛盾であればいいのですが、中1にあまり抽象的なことを教えるのは考えものですし、そのような概念がどのような場面で使われるかを示すという意味で、現実世界で対応するものとの関連を強調したいところです。マイナスとマイナスの積はなぜプラスになるかという議論はよく話題にのぼりますが、いくつかの例を次の文献で調べてみてください。

- ・野崎昭弘, 1980 『逆説論理学』(中公新書)
- ・野崎昭弘(監修), 1995 『数学の窓の開けかた』(東京書籍) pp.66-69

[4] 個人的な経験で恐縮ですが、イデアルって倍数の概念の抽象化だと聞いてなあんだと思ったことがあります。あの定義の羅列をみて倍数をイメージできる人はすごいと思います。

[5] このような y を x の共役数という。分母の有理化などに使われる。

私は、普通次のように教えています。

- ・ $(-2) \times (-3)$ という式を立てなければならないような文章題を考えなさい。
- ・その文章題をマイナスを使わないで言い換えなさい。
- ・その文章題を解きなさい。
- ・では、もとの文章題の答えは何ですか？

でもときどき、このような奇妙なことを考えてくれる生徒がいます。

正田先生は、 (-3) 人の女性と浮気をして、それぞれの女性は (-2) 人の子どもを産みました。さて正田先生は何人の子持ちになったでしょう？

マイナスを考えることのできる量のレパートリーは実は限られているのです。基準になるものを考えて、それよりも多い少ない。プラスの方向を考えると、東をプラスにするなら西がマイナス。その時間より後をプラスにするなら、前がマイナス。

このことは、ベクトルの内積の定義を現実世界との関連で考えるときにより顕著にあらわれますし、外積となると、電磁気学の電流、磁束密度、力が唯一と言っていいほどの例になります。

しかし、例が少ないから困るということではなくて、定義の内容が生徒にとってしっくりくること。言い換えればともすると天下りになりやすい数学の定義を、その必然性をこのような実例から理解させることが大切だと思います。また、教科書に出ている実例をひとつだけではなくて、他の例を考えさせることも理解をより堅固なものとするのに有効でしょう。

8.4 代数和をめぐる

「 \bar{A} 」は、次の3通りの意味があります。

- ・減算をあらわす記号。
- ・数の符号。
- ・数の符号をかえる（反数をとる）演算子。

この異なる3つを同じ記号にしているので、計算がスムーズに行なえるのですが、この3つが同じと解釈できることを中1で示すこととなります。教科書ではどのような手順でそれを示そうとしているのか調べて、その段階に応じて不注意な混同を

避けるようにしないと混乱してしまいます。敢えて違う符号を使って区別しておいで、両者が一致することを示すことが良い場合もあるでしょう。

例えば、マイナスの数を導入した当初は、出てくる数すべてに $(+5)$, (-2) などと括弧をつけて必ず符号を記すようにします。中には、 $\boxed{+5}$, $\boxed{-2}$ などと違った表しかたをして、

$$(+5) - (-2) \text{ が } (+5) + (+2) \text{ に等しい。}$$

ことを示している本もあります。

分配法則などを用いて (マイナス) \times (マイナス) が (プラス) になることを示すには、マイナス1倍するという係数 (-1) が省略された、 $-$ と、反数をとる演算子とを区別する必要があります。後者を $[-]$ であらわすと、

$$(-2) \times (-3) = (+2) \times (+3)$$

は次のように記せます。

$$\begin{aligned} & (-2) \times (-3) + (-2) \times (+3) \\ &= (-2) \times (-3) + (-2) \times [(-3)] \end{aligned}$$

分配法則によって

$$= (-2) \times f(-3) + [(-3)]g$$

反数の性質によって

$$= (-2) \times 0 = 0$$

よって、 $(-2) \times (-3) = [(-2) \times (+3)]$

同様に、 $(-2) \times (+3) = [(+2) \times (+3)]$

$$\begin{aligned} \text{上の2式より、} & (-2) \times (-3) = [(+2) \times (+3)] \\ &= (+2) \times (+3) \end{aligned}$$

もっとも、このような説明が中1にすんなり理解できるかどうかは疑問ですが……。

8.5 端数の処理

古代エジプトでは、1よりも小さい端数を単位分数^[6]の和としてあらわしました。例えば、

$$\frac{2}{3} \text{ を、 } \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

のようにあらわすのです。これは、端数がでたら、 $\frac{1}{2}$ よりも大きい小さいか調べて、大きいならば、 $\frac{1}{2}$ と記し、あらわしたい数と記したものの差をまた端数として考える、次にこの端数が $\frac{1}{3}$ よりも大きい小さいか調べて……というアルゴリズムによって一意的に定めることができますし、無限調和数列は発散するので、どのような数でもあらわすことができそうだとことがわかります。

一方、バビロニアでは、60進法による小数で端数をあらわしていました。これは、時間や角の大きさの、「分」「秒」にも残っています。西洋での10進法による小数は、1585年のシモン・ステヴィンを待たなければなりません^[7]。デカルトが生まれたのが1596年ですから、両者はかなり近接していると言えるでしょう。中国では、「分」「厘」「毛」などの位の名称を付けて10進法の小数を扱うことは、『九章算術』^[8]の昔にさかのぼることができます。

実数のそれを越えない整数のうちで最大のものを整数部分といい、 x の整数部分を、 $[x]$ とあらわします。また、整数部分との差、すなわち1未満の端数を小数部分と言います。次のようなアルゴリズムを考えてみましょう。ある正の実数 x の小数部分の逆数を考えます。これは、1を越えていますから、この逆数も整数部分と小数部分に分けることができます。さらにこの小数部分の逆数を考えるのです。例

[6] 分子が1の分数。

[7] 大矢真一、片野善一郎、1978『数字と数学記号の歴史』(裳華房) pp.34-39
中村幸四郎、1981『数学史』{形成の立場から}(共立全書) pp.191-195

[8] 中央公論社の『世界の名著』に翻訳が収められている。

えば、 $\frac{113}{355}$ は次のように処理されます。

$$\begin{aligned}\frac{355}{113} &= 3 + \frac{16}{113} \\ &= 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} \\ &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}\end{aligned}$$

このような、分子がことごとく1の繁分数を連分数と呼ぶことがありますが、いろいろな面白い性質が知られています。

- ・有理数は有限の連分数であらわすことができる。(ユークリッドの互除法を思い出しましょう。)
- ・近似の深さを高めるにつれて振動しながら近づく。
- ・有理数係数の二次方程式の解のうち無理数のものの絶対値は循環連分数であらわすことができる。(整数論におけるガロアの業績です)

また、平方根の一部では比較的容易にその連分数展開が得られるものがあります^[9]。

[9] 前掲の『数学の窓の開けた』 pp.87-91

【 問題 】 連分数 $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{\ddots}}}$ を $[a; b; c; \ddots]$ などとあらわし、

$u_0 = 2; u_1 = [2; 4]; u_2 = [2; 4; 4]$ なる数列 $\{u_n\}$ を考える。次の問いに答えよ。

1. $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ を満たす $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を求めよ。

2. 前問の A について、 A^n の各成分を n の式であらわせ。

3. $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}; \quad g(x) = \frac{px + q}{rx + s}$ に対して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & p & q \\ c & d & r & s \end{pmatrix}$$

である $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考えると、 $f(g(x)) = \frac{a^0x + b^0}{c^0x + d^0}$ となることを示せ。

4. u_n の一般項を求めよ。

Chapter9

文章題と量的関係

9.1 代数学の3つの段階

例えば、次の文章題を解くことを考えてみましょう^[1]。

A, B 2つの容器に水が入っている。まず、A から B に、B にはいったのと同量の水を移し入れ、次に B から A に、A に残っているのと同量の水を移し入れ、さらに A から B に、そのとき B に入っていたのと同量の水を移し入れた結果 A も B 水の量はともに、8 ずつになった。はじめに A, B にはそれぞれ何㍓の水が入っていたか。

まず、文章全体を読んで全体を覚えられるかどうか自信がありませんね。最後の「入っていたか。」を読むことには初めの部分が頭の中から逃げ出している感じです。こんなときにはメモをとりながら読みますよね。書いてある情報を必要な部分だけ圧縮して整理するのです。

このようなときに、代数の「文字でおく」という手法は威力を発揮するでしょう。ネッセルマンは代数学の発展に、言語的、省略的、記号的の3つの段階を区別することができる^[2]と指摘しています。反面、文章題から式を立てることはかなり難しいことです。いきなり、簡潔な方程式を作ろうと思わずに、気軽なメモを言語的にも省略的でも作ってみるとよいのではないのでしょうか。

[1] 中島 孝 (監修), 1984 『中学生の数学 (数量編) 改訂版』(槇書店)

[2] 中村幸四郎, 1981 『数学史』(共立全書) p.83

式に直した部分 (参考)	A	B
A,B 2 つの容器に水が入っている。	a	b
まず、A から B に、B にはいっていたのと同量の水を移し入れ、	$a - b$	2b
次に B から A に、A に残っているのと同量の水を移し入れ、	$2(a - b)$	$2b - (a - b)$
さらに A から B に、そのとき B に入っていたのと同量の水を移し入れた結果	$2(a - b) - 2b - (a - b)g$	$2f2b - (a - b)g$
A も B 水の量はともに、8 ずつになった。		

この場合は、とりあえず「容器」である必要はなく、A,B の場所さえあればいいので、表に A,B の場所を作って置きましょう。また、いろいろと出し入れをしているので、手順のそれぞれに分けてどのようになっていったか記しておきます。

そして、長い文章を相手にするときには、どこを式に直したかはっきりさせておくと、まだ式に直していない部分を知ることができます。つまり、その部分を式にあらわせるように努力すればいいのです。

まず、何を聞かれているかに注目すると、「はじめに A,B にはそれぞれ何の水が入っていたか。」とあるので、初めにそれぞれ、a, b の水が入っていたとおきます。上の表のようにまとめることができれば、

$$\begin{cases} 2(a - b) - f2b - (a - b)g = 8 \\ 2f2b - (a - b)g = 8 \end{cases}$$

のように式をたてることができるでしょう。

9.2 公式の3つの量

小学校では、次の3つの公式が出てきます。

$$\cdot (\text{道のり}) = (\text{速さ}) \times (\text{時間})$$

$$\cdot(\text{速さ}) = (\text{道のり}) \div (\text{時間})$$

$$\cdot(\text{時間}) = (\text{道のり}) \div (\text{速さ})$$

しかし、中学校では等式の性質を用いて第1のものから他のものを導くことができるので、1つだけを覚えていればいいのです。

再び代数の問題例を考えてみましょう。

ある人が毎時4 kmの速さで山に登り、下りは毎時6 kmの速さで登りのときよりも3 km遠い道を通って帰り、往復に5時間半かかった。歩いた距離は全部で何 kmか。ただし休んだ時間は考えない。

出てくるものは、行きと帰りと2つあります。それぞれにわけて考えるために表を書いてみましょう。

	道のり	速さ	時間
行き	?	4km	?
帰り	?	6km	?

前半だけ読んだだけではわからないことだらけですが、どれかを?ではなくて、未知数とすれば状況は進展します。「往復に5時間半かかった」とあるので、かかった時間をそれぞれx時間、y時間とおいてみましょう。

	道のり	速さ	時間
行き(登り)	4x	4km	x
帰り(下り)	6y	6km	y

この表にまだあらわしていない部分は、

1. 下りは……登りのときよりも3 km 遠い。
2. 往復に5時間半かかった。

ですが、ここまでの情報で式にあらわすことができるでしょう。

$$\left(\begin{array}{l} 6y = 4x + 3 \\ x + y = 5.5 \end{array} \right.$$

ところで、「歩いた距離は全部で」とあるので、登りの道のりをx kmをおいてみましょう。「登りのときよりも3 km 遠い」とありますから、下りの道のりはx + 3 km となります。

$$\cdot(\text{道のり}) = (\text{速さ}) \times (\text{時間})$$

ですので、

$$x = 4 \times (\text{往きにかかった時間})$$

$$x + 3 = 6 \times (\text{帰りにかかった時間})$$

となります。これで、分数係数の方程式として「往復に 5 時間半かかった」をあらわすことができます。

9.3 多次元量

上の解法では、文字 x をおいてから方程式を立てるまでに表をかいて情報を整理してみました。表にかくと 2×2 ですが、4つをそのままみているのとは頭の中の負荷が違うように思います。しかし、学習者の立場にたてばこのような表の形は、言われてみないと、つまり実際に整理されたものを見てからではないと、発想として生まれにくいものです。

例えば、次のような文章題^[3]を考えてみましょう。

A, B 2 種類の油があります。A の単価は a_{11} 円/kg、密度は a_{21} kg/l、
B の単価は a_{12} 円/kg、密度は a_{22} です。今、A の油を x_1 l、B の油を x_2 l
買ったので値段の合計は b_1 円、重さの合計は b_2 kg になりました。

この情報を表にまとめると、

	A	B	合計
単価	a_{11}	a_{12}	b_1
密度	a_{21}	a_{22}	b_2

となりますが、これは多次元の乗法、

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ \uparrow & & & \uparrow & & \uparrow & \\ & a_{11} & a_{12} & & x_1 & & b_1 \\ & a_{21} & a_{22} & & x_2 & & b_2 \end{array} =$$

に他なりません。そして、『量の授業』によれば^[4]、「構造表にまとめて問題を出すと、立式はかなりよくできます。しかし、構造表にまとめないで文章で問題をだす

[3] 前掲『量の授業』中学校編 p.54

[4] p.55

と、20%～30%立式の正答率がさがります。このことは多次元の量の構造がつかめていないことに原因がある」とされています。

ここでいう構造表は長い文章を読むための助けになることは事実でしょう。しかしそれ以上に、文章題のタイプにはいろいろなものがあるものの、このような多次元量の枠組みで情報を整理することが有用なものが多いようです。

9.4 量の種類と量の理解

また文章題の例から始めます。

4トン積みの大型トラックと2トン積みの小型トラックがあります。

この2種類のトラックで合計8回、26トンの荷物を運びました。それぞれのトラックは何回運びましたか。

未知数は運んだ回数にしましょう。大型が x 回、小型が y 回運んだとします。うっかりすると「合計8回」というところを読み落としかねませんが、回数そのものも重要な量として考えると、次の表にまとめることができるでしょう。

	1台の積載量	回数	運んだ量
大型	4 [t/台]	x [台]	$4x$ [t]
小型	2 [t/台]	y [台]	$2y$ [t]
合計		8 [台]	26 [t]

式としては、この表を縦にみて、
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 4x + 2y = 26 \end{cases}$$
 となります。これを行列であらわすと、

$$\begin{array}{cccc} \dagger & & ! & \dagger & ! & \dagger & & ! \\ & 1 & 1 & & x & & & 8 \\ & 4 & 2 & & y & & & 26 \end{array} =$$

となりますが、表と行列の縦横が入れ替わっていることに気がきます。1台を動かすと大型、小型ともに1回に数えるという自明な量を考えているのですが、表での整理が行列そのものをあらわすとは限りません。

中学校では、中1で一元、中2で二元のものを扱って、中3では簡単な因数分解と二次方程式の解の公式という教材の大体の棲み分けがあります。文字が生徒にとって把握しにくいので、2種類のものを扱うなんてとんでもないという主張は理解で

きます。このような問題が、中1にでてくる場合もあります。実際、立式ができれば、 $x + y = 8$ ですから、 y の代わりに $(8 - x)$ とかけばいいのですから、1元で扱うことができそうです。しかし、問題は立式ができにくいということです。表の合計の欄からの推論とか、省略代数のように言葉を使った公式で考えるとかもできでしょう。しかし、無理に一元方程式の応用に詰め込まないで、中2で二元が扱えるようになって、さらに一次関数の指導のなかで、量の関係を充分把握できてから統合的に扱う方が効率が良い場合もあるでしょう。

9.5 内包量と外延量

このように多次元量の乗法というとらえかたをすると、掛け算が立式の重要な要素になることがわかります。加法は、同種の物の合併、追加、増加などの計算ですが、乗法はある量とある量とを掛けることによって普通異種の量が生まれます。

微積分を局所正比例として、乗法・除法の拡張ととらえる立場から、量について次のような分類がなされています。ある点での強さをあらわす「内包量」と、考察する範囲の大きさを示す「外延量」との積によって、考察する範囲全体が持つ「外延量」があらわされます。ある点とは、時間的流れの中での「点」であったり、空間的な点であったりするので、内包量は、

	存在型	位差型
空間	密度	勾配
時間	流量	速度

などと分類することができますが、何が存在するのか、何の差を考えるのかによって量にはかなりのレパートリーがあることになります。トラックで荷物を運ぶ問題で、4 [t/台] と 2 [t/台] との合計を考えませんでした。これらは内包量であって、外延量が合併によって加法的な変化をします。「計量法」には 70 の量があげられているとのこと^[5]

以前、松江農林高等学校にお勤めであった森脇 均先生から次のようなよいお話をうかがったことがあります。農業科の先生が、「うちの生徒は農薬の混ぜかたさえ

[5] 銀林 浩, 1975 『量の世界』(麦書房) p.17

も知らない。危なくてしかたがない。いったい数学の先生はしっかり授業をしているのか。」と数学の先生である森脇先生に問われたそうです。数学の学力の現状についてかなり率直に話をされ、決して数学科が手を抜いている訳ではないことを具体的に説明されたそうです。それから農業科の先生と森脇先生たちは、総合的な取り組みを始められることになります。

確かに、濃度の問題は式を立てるのが難しい問題とされています。

$$(\text{濃度}) \times (\text{溶液の重さ}) = (\text{溶質の量})$$

を暗記させることは、比較的やさしいかも知れませんが、それが適用できない。あれっ？掛け算だっけ割り算だっけ？そもそも、濃度ってものが実感のわかないとらえにくい量であるようです。

少し脱線になりますが、温度について考えてみましょう。「水の融点を0度、沸点を100度としてその間を等間隔でわけたもの」という知識だけで、温度をわかったことになるのでしょうか。「ひゃあ、暑いと思ったらきょうは35度もある。」とか、「昨日、うちの息子が40度の熱をだしてね」とかを理解するためには、「日本では最高気温が30度を越えた日のことを真夏日といって暑い日としている。」とか、「人間の体温は大体、36.5度前後で、37度を超えると病気であって、39度を越えることはめったにない。」などの知識が必要でしょう。つまり、数値からその実感をつかまえることが必要です。もうひとつ例をあげれば、速度です。時速30kmとは、スクータの法律で規制されている速度で、主要国道での自動車は普通60kmに規制されていて、高速道路では100km、これは、在来線の特急の……などという典型的な速度との比較で時速の話聞くのであって、野茂の直球の速さを、「1時間それがそのまま飛んだとすると東京から」などとは考えないのです。

松江農林高校には、いろいろな計測器があります。比重計、糖度計などなど。それらを使ってその量の実感を得ることを量に関する学習に取り入れて、その中から乗法、除法を使って量を導いたり、比較をすることができることを実際の活動との関連で示していったのでした。

【 問題 】 本文中の数値で答えの出る問題を解いて見てください。

Chapter10

論証と図の役割

10.1 小学校と中学校の図形

中学校の図形領域は、円周角の定理と三平方の定理を別にして、小学校での算数の内容と重複が多いように思います。図形領域のことを「幾何」ということがあります。この言葉は、図形的な内容とともに、その論理体系の学習というニュアンスがあるように思います。「学問としての数学を単なる日常的技術知としての数学から区別せしめ、これを普遍的知識たらしめるものは証明的方法にある。」^[1]と述べられていますが、まさしく中学校での図形的内容、すなわち幾何の目標とも言えるでしょう。

van Hiele は次の段階を考えています。

0：提示された図形をみて「正方形」などのその図形の名前をいったり、2本の棒を平行にするなどの操作をしたりする。

1：図形を構成している要素を観察することによって、その性質を発見する。

2：図形の性質をインフォーマルな理由付けによって、論理的に関係付ける。

3：演繹的な証明を行なう。

4：他の公理系についての理解をする。

[2] おおむね、小学校での活動は、1のレベルまでであったのに対し、中学校では3

[1] 下村寅太郎, 1941 『科学史の哲学』(復初文庫・評論社)の、「三 数学の形而上学的系譜、一 ポリスに於ける数学の成立」

[2] D.Fuys, et al., 1988 "The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents" (N.C.T.M. J.R.M.E. Monograph No.3)

のレベルが子どもの活動に含まれることを目指すものと言えるでしょう。ですから、中学校の1年での幾何は、2のレベルを含み得るような経験が必要となります。

しかし、生徒にとっては「事実」によって既習未習の区別をしているので、例えば「四角形の分類とその性質」などは、小学校で聞いたことのあることとなります。ですから、中学校でそれを教えられても単に小学校での復習としか思われないう恐れがあります。それも四角形の性質というのは、1年の内容ではなくて中2の内容なのです。

10.2 ピアジェの発達心理学

このように小学校と中学校とで区別がなされている根拠を発達心理から大略をみておきましょう。Piaget^[3]は発達の時期を大きく4つにわけています。

1. 感覚運動的知能 生後2年目くらいまでの言語を初めとする象徴による表現や思考ができない時期。
2. 前概念的思考 保存の概念が得られていない時期で、領域によっても違いますが、物質量では早く、重さ体積では遅めになりますが、だいたい小学校の前半に保存の概念を得るようになります。また、理由付けの意図はみられるものの一貫性がないという特徴もあります。例えばこんなインタビューがなされるでしょう。五円玉と十円玉を子どもに見せながら、実験者：『どうして五円玉は水に沈むの？』, 子ども：『穴があいているから』, 『じゃあ、十円玉はなぜ水に沈むの？』, 『穴があいていないから』
3. 具体的操作 目の前にあらわれているものに関する推論が可能になります。例えば数個のおもりを重さの順に並べたりすることができます。
4. 形式的思考 知能検査に「昨日汽車が衝突しました。しかしあまり重大な事故ではありませんでした。48人が死んだだけです。」の不合理なことを指摘させたり、文章の中の目の前にはいない太郎、花子、次郎について、「太郎は次郎よりも背が高い。花子は次郎よりも背が低い。一番背が高いのは？」と判断す

[3]ジャン・ピアジェ,1947/波多野完治,滝沢武久,1967『知能の心理学』(みすず書房) pp.233-285

ような推論がありますが、こんな問題ができること、形式的思考ができるようになるのは11歳以降のことです。

年齢に応じて知的活動の水準がだいたい上に紹介したように変化していることが指摘されるのですが、これは個人差のあることで、例えば形式的操作は、11・12歳ごろから14・15歳ごろにかけて一応ととのうとされています。

もっとも、教育と発達の間わりに関しては、発達のための準備（readiness）がととのわないと教育は不可能であるという見解から、むしろ教育が発達の「最近接領域」^[4]で行なわれるならば、発達を促進するという立場もあります。

推論の方法を教えるのに中学校の生徒は面白い対象であると言えるでしょう。

10.3 日本での幾何の扱い

明治以降の中学校での幾何の扱いをみる際に注意が必要なのは、中学校が義務教育ではなかったということです。あとの章で見ると1886年の「中学教授要目」では、中1に「幾何初歩」が割り当てられていましたが、1902（明治35）年の中学教授要目改訂で、幾何初歩は廃され、幾何は中3からとなります。1931（昭和6）年の要目では1年に幾何が「立体の観察測定、平面の作図、模型の作製などによりて空間に関する観念を明瞭にし、かつ後学年における学習の基礎たらしめんことを力むべし」（その要目の注意）と配置されます。戦時中・占領下の時期を隔てて、この趣旨は昭和30年代以降今日に至るまでの、学習指導要領における幾何についての基本的な枠組みとなっています。

その細かな内容は、小学校の内容との出入りがあるものの、中1の幾何では、立体の模型の作製、観察と、平面図形の作図などが行なわれています。それは紙を折ったりの操作を中心としとしながら、中2以降の論証の基礎となるような作図や三角形の決定条件などが扱われるのです。確かにこのような経験がなければ、「其論ずる所の事物に付て、生徒の思想未だ明瞭ならず」^[5]という心配はあるでしょう。しかし、これがあることによって、論理体系・証明的方法の導入に十分な資質を子ども

[4] ヴィゴツキー、1934/柴田義松訳、1962『思考と言語（下）』（明治図書）pp.58-95

[5] 1886年の中学校教授要目への注意

に保証しているかどうかは少し疑問です^[6]。

10.4 幾何の図

では、幾何の論証についてみてみましょう。初等幾何での論証は、「図を書いて、ある程度、図に頼りながら論理を進めていく」^[7]という特徴があります。代数には文字という代表元をあらわせる武器があるのですが、幾何では図がそれに当たります。

もともと、「一般の三角形」などというものはどこにも実在するものではなく、概念にすぎない。……それは特殊性の意識されないものでなくてはならない^[8]。

もっとも図には「まわり向き」「側」という泣きどころがあって、それは Pasch^[9]が指摘したように公理として扱われるべき性質だったのです。

また、「一辺BCを共有する2つの平行四辺形ABCDとBEFCとがある。」の図として、3点A, B, Eが一直線上にあるような図を書いてしまう間違いがおこることが指摘されています^[10]。一般の図としてかいたつもりで間違いをおかす例と言えるでしょう。

実は、幾何の証明に図は必要ないのです。例えば次の問題を考えてみましょう。

A B = A Cである二等辺三角形の底辺B Cの中点をMとする。A MとB Cとはた がいに直交する。

この問題に図がついていません。しかし、無いままでは考えが進みませんから適当な図をかいてみましょう。さて、どんな図をかきましたか？横長の三角形を書いた人もいれば、のっぼな三角形をかいた人もいるでしょう。さすがに正三角形だと二等辺三角形の一種ではありますが「一般の図」とは言えないので、それは書きなおしましょう。ひょっとしてへそまがりな人は、対称軸を鉛直には書かなかったかもしれませんが、三角形の頂点に名前をA, B, Cと振って、線分BCの中点を定規で

[6] 正田, 1996 「中1幾何の授業構想」(『教育方法学研究』第22巻)
[7] 栗田 稔, 1981 『幾何』(教職数学シリーズ 共立出版) p.14
[8] 前掲書 p.15
[9] 杉山吉茂, 1986 『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』(東洋館出版社) p.51
[10] 小関熙純 編著, 1987 『図形の論証指導』(明治図書) p.66

はかって長さを半分にするでも、コンパスを使ってでもとって、Mと書きます。A Mを結んで、角AMBの大きさをはかってみましょう。あら不思議、いろいろな種類の図がかけるはずなのに、どの図でも角AMBの大きさは、90度になりそうなのです。仮定として述べられた条件を満たす図であるならばどのようなものでも結論が成り立っているはずで

す。つまり、この命題はどんな図をかいたかによらない普遍性をもつ性質を述べているのです。しかし、証明をかかなければ答案とは言えませんね。そこで、答案を作るために図に記号を書き入れながら考えていきます。

代数と幾何の答案の違いは、代数の答案は書きながら答えがわかってくるのですが、幾何の証明は、なぜ成り立つのかがわかってからでないと答案が書き始められないことにあります。逆に言えば、証明を書き始める前に図をもとに考えて、なぜこの命題が成り立つのかわかる段階を大切にしたいものです。なお、この図には、図がそうであるかよりも、どのような条件でかいたかを示す記号を記し、推論によって得られる条件を書き加えていきます。結論はそれらと区別するために、「？」を付して記しておきます。

もっとも、この問題は図をまじめに定規とコンパスでかくと証明するべき条件が既に出てしまうのであまりいい問題とは思えませんが……。

10.5 幾何の証明

さて、これまでに図を使った推論でAMとBCが直交することを見てきましたが、この図だけでは証明とは言えません。図では4つのコマにわけて推論の過程を追っていますが、1つの図で間に合わせるのが普通で、そうなるるとどのような順序で考えたのかわかりにくく、上から順に読んでいけば意味が通じるという答案の条件を満足していません。

例えば、次のようになるでしょう。

$$\text{仮定より } AB = AC \dots\dots (1)$$

$$\text{仮定より } BM = CM \dots\dots (2)$$

$$\begin{array}{l} \text{AMBと } \text{AMCにおいて} \\ \text{AM 共通 } \dots\dots (3) \end{array}$$

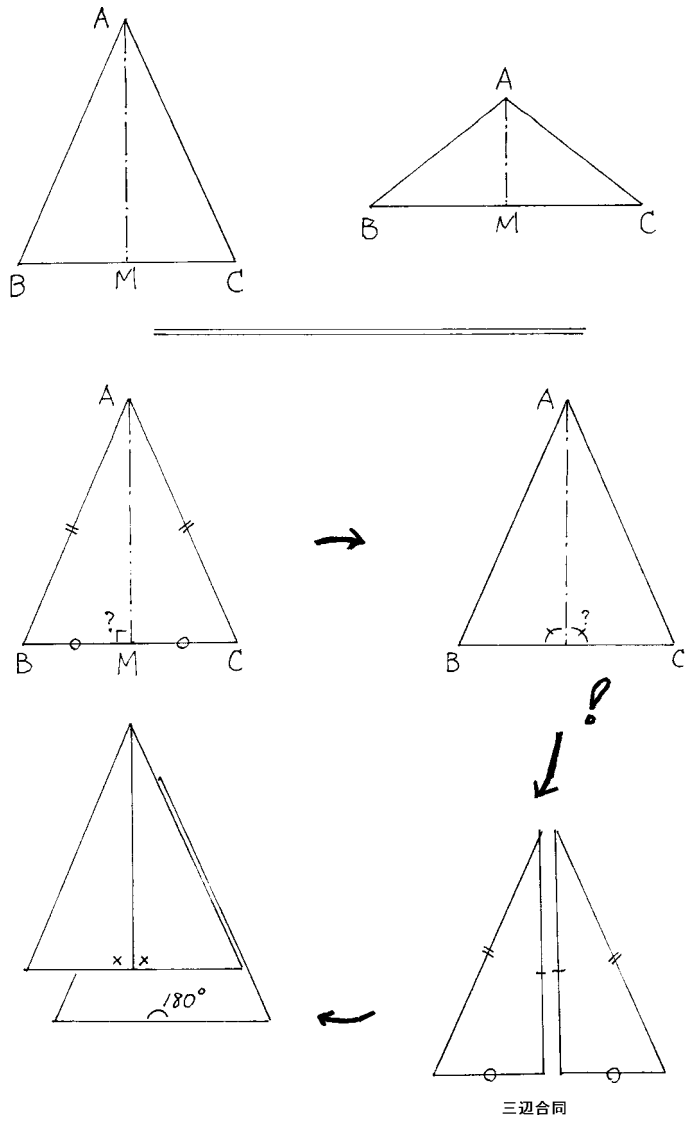


図 10.1: 幾何の証明と図

(1)(2)(3) より三辺合同なので、

$$AMB \cong AMC$$

$$\angle AMB = \angle AMC \dots\dots (4)$$

B, M, C は同一直線上にあるので、

$$\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ \dots\dots (5)$$

(4)(5) より

$$\angle AMB = 90^\circ$$

$$AM \perp BC$$

これは、いまかいた図に関して成立していることはもちろん、他の図でも成り立ちます。図に依存しない普遍的な性質について述べているのです。

答案には何を根拠にそれを主張するか、直前の行のみを根拠とするもの以外は明示する必要があります。その根拠をはっきりさせるために、証明を始める前に、(仮定)と(結論)を答案に記します。この仮定と結論の識別も幾何の答案の難しさとして指摘されます。

一般に、命題を「P) Q」の形にあらわせるとき、Pをこの命題の「仮定」Qを結論と言うのですが、必ずしもこの形にあらわすことが容易ではないのです。例えば、「ひし形の対角線は、たがいに直交する。」は、四角形について考えているので、「その四角形はひし形である」)「その四角形の対角線は、たがいに直交する」となるのですが、対角線についての記述であると思えば、「その対角線はひし形のである。」)「その対角線はたがいに直交する」となります。また、記述を効率よくするために、四角形の頂点にA B C Dと名を付けることが行なわれますが、「ひし形」をあらわすにも慎重が必要です。ここでの「ひし形」は「定義」にそって「 $AB = BC = CD = DA$ 」とかかれるべきですが、子どもにとって、(仮定)に「ひし形である」をかくとは、ひし形の性質を羅列することになりやすいのです。

【 問題 】

1. ある直線 l に関する対称移動と、他の直線 m に関する対称移動との合成は、何であるか、同一平面上にある2直線の位置関係によって場合分けをして答えてください。

2. 点Pを通る定直線 l がある。点Pの回りに左回りに i だけ回転することを、「直線 l に関する対称移動をしてから直線 n に関する対称移動をする」とあらわしたい。点Pを通る直線 n はどのような直線にするべきですか。
3. ABC と DEF が同じまわり向き^[11]で合同なとき、2つの線対称移動の合成で重ね合わせることができる。
4. 多角形の内角の和について、定理地図^[12]をかいてみてください。
5. 星形多角形について前掲の『数学の窓の開けかた』などで調べてください。

[11] ABC は左回りの順なら DEF も左回り

[12] 正田,1996「中1幾何の授業構想」(『教育方法学研究』第22巻)

Chapter11

四角形の性質

11.1 四角形の分類

対称移動の合成という観点で、中2の教材である「四角形の性質」を振り返ってみましょう。四角形には線対称のものと、点対称なものがあります。これについて表をかくと次のページ左のようになりますが、これでは長方形とひし形の区別が付きません。そこでおたがいに区別ができるような特徴をあげて、その個数を書くことにすると、次のページ右の表のようになります。

このようにまとめてみても、何も不思議はありません。でも右の表のそれぞれの欄に入り得る数がどのような可能性があるか考えてみると、

点対称の中心	: 0, 1の2通り。	\geq	の、 $2 \times 3^3 = 54$ と
辺の中点を通る対称軸の数	: 0~2の3通り。		
対角線と一致している対称軸の数	: 0~2の3通り。		
たがいに平行な辺の組の数	: 0~2の3通り。		

54通りの四角形が考えられます。しかし不思議にも既知の四角形の種類は8種類しかないのです。

もちろん、平行四辺形であることと点対称であることは同値であるなどの性質があるのですが、8種類しかないことは、中2の幾何の授業全体の目標にできるほどのボリュームのある課題と言えるでしょう。

点： 点対称（の中心の数）。	線： 線対称であるかどうか。
中： 辺の midpoint を通る対称軸の本数。	対： 対角線と一致している対称軸の数。
平： たがいに平行な辺の組の数。	

として、

種類	点	線	種類	点	中	対	平
正方形			正方形	1	2	2	2
長方形			長方形	1	2	0	2
ひし形			ひし形	1	0	2	2
平行四辺形		×	平行四辺形	1	0	0	2
等脚形	×		等脚形	0	1	0	1
たこ形	×		たこ形	0	0	1	0
台形	×	×	台形	0	0	0	1
一般の四角形	×	×	一般の四角形	0	0	0	0

11.2 敷き詰め

四角形の性質として、その形をしたタイルを作れば、それで平面を敷き詰めることができるという顕著な性質があります。平面を敷き詰めることができる正多角形は、3, 4, 6 の 3 種類しかありませんが、正 4 角形の「正」に対して “what if not” を行なった結果はかなり鮮裂です。

敷き詰めることを正確に言えば、重なりや隙間なくぴったりとつけるとなるでしょうが、ようするに辺と辺とがぴったり隣のそれと一致して、ある頂点の周りに集まる四角形のそれぞれの角の合計が 360° であるのです。実は辺の midpoint に関する対称移動をすれば隣の四角形になること、それを 2 つ合成すると平行移動になることなどを使って敷き詰められることが証明できます。図は凸四角形についてのものですが、凹四角形でも敷き詰めることができます。

では、1 種類ではなく 2 種類の正方形を使って敷き詰めることはできるでしょうか。もちろん 2 つの辺の長さの比は任意に与えられるとします。これも答えは敷き詰められるです。

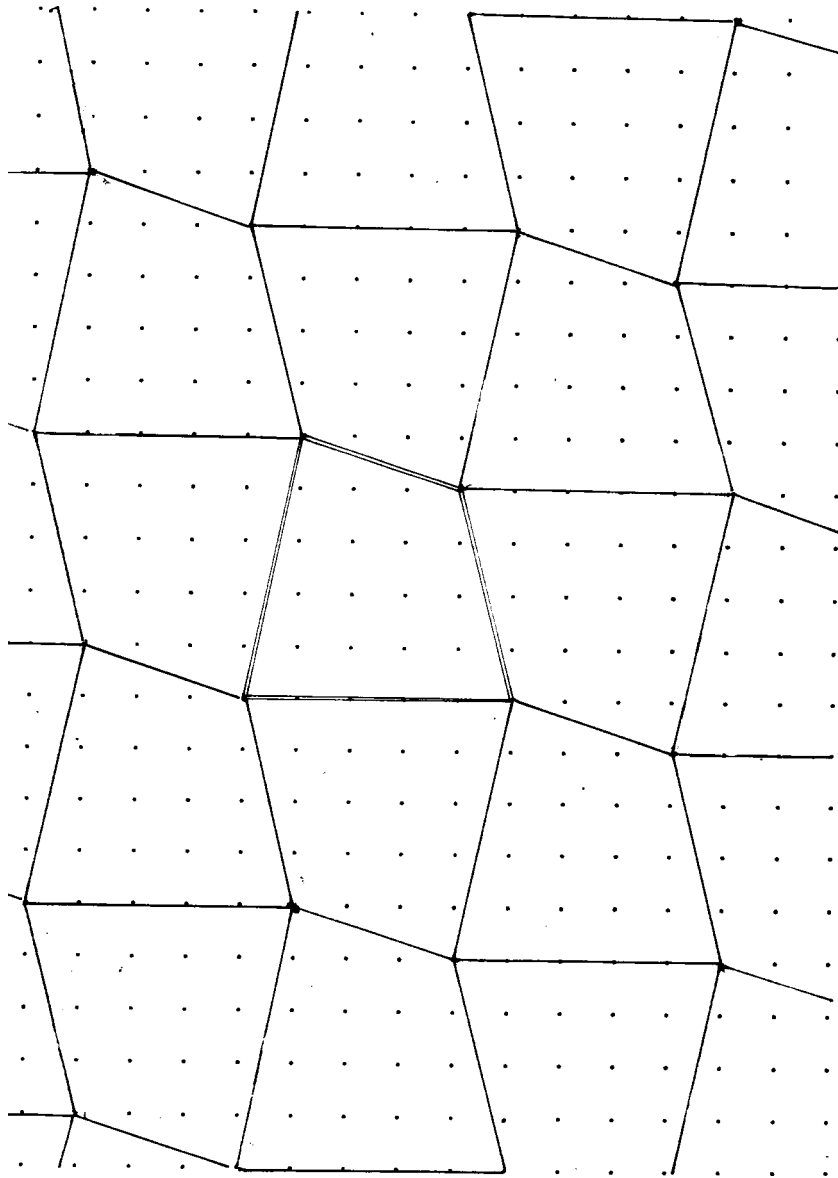


図 11.1: 凸四角形による平面の敷き詰め

リンドグレンの方法^[1]は裁ちあわせに威力を発揮しますが、上の結果は裁ちあわせによる三平方の定理の証明を示唆します。

【 問題 】

1. (1) 三角形 ABC が A を通る対称軸を持つことを、合同の記号を使って、

$$ABC \cong ACB$$

と書くことができます。四角形が点対称であることや、線対称であることはどのようにあらわすことができるか。

- (2) 直線 l を点 P に関して対称移動したら、直線 l' となったとき、2 直線 l, l' の関係を、点 P と直線 l との関係で場合分けして答えよ。

2. (1) 正五角形 $ABCDE$ の頂点 A を通る対称軸に対角線 BE と辺 CD がともに平行であることを利用して、2 つの対角線 BE, AD の交点を X とすると、四角形 $BCDX$ がひし形であることを示せ。

- (2) 正五角形の対角線の長さは、一辺の長さの x 倍であるとする。 AXE と BAE とが相似であることを利用して、 x の値を求めよ。

- (3) 正五角形の作図法を確かめよ。

- 1) 辺 CD をとり、その中点を M とする。
- 2) 辺 CD の垂直二等分線 l 上に、 $ML = CD$ を満たす点 L をとる。
- 3) 線分 CL の延長上に $LP = CM$ を満たす点 P をとる。
- 4) 点 C を中心として、点 P を通る円をかき、直線 l との交点を A とする。
- 5) 点 D を中心として点 C を通る円と 4) でかいた円との交点を E とする。(以下略)

[1] 池野信一他, 1976 『数理パズル』(中公新書) pp.170-176

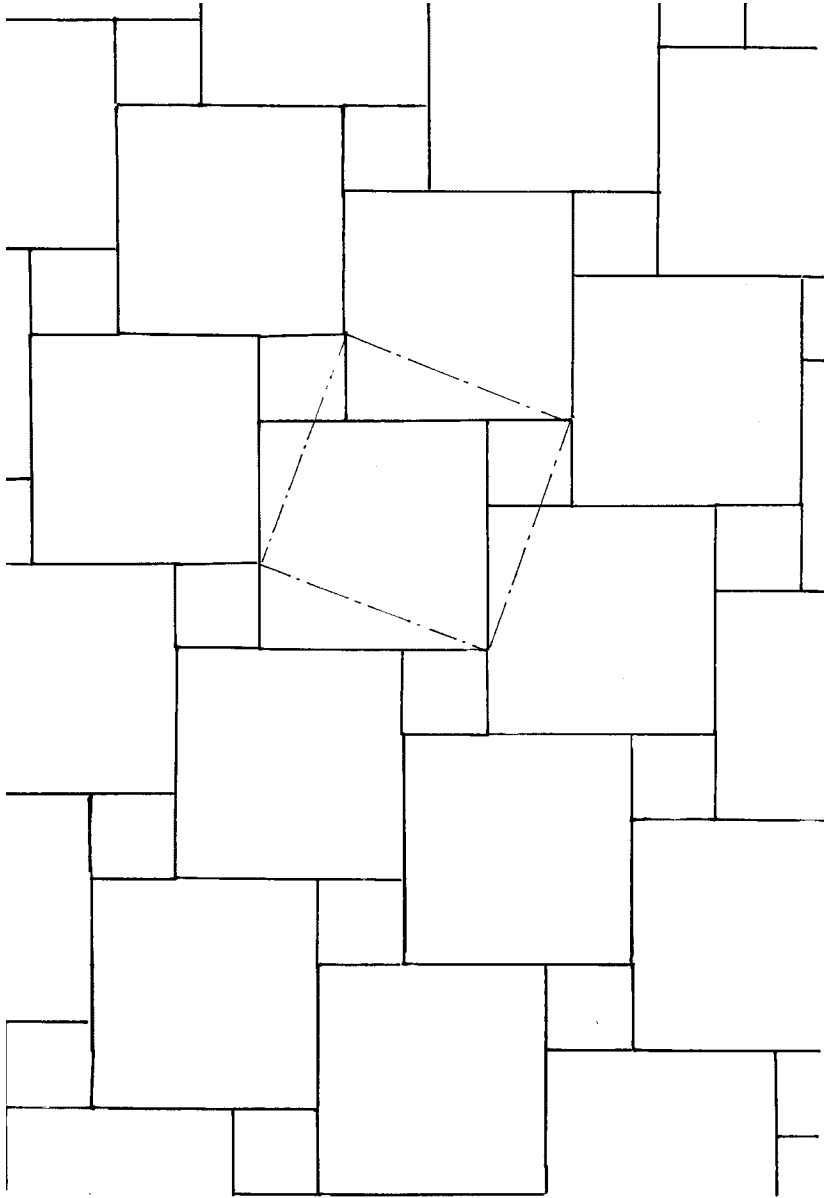


図 11.2: 2種類の正方形による敷き詰め

陸上競技の新記録はどのような量がとられるでしょうか。100m 走は数値が小さい方が、走り幅飛びは大きい方がとられます。実際、100m を 12.8 秒で走るのよりも、11.3 秒で走った方が速いですし、幅飛びで、4m と 6m とでは、6m の方がいい記録です。

スピードを測るのに古くからいろいろな方法がとられてきています。いまの自動車には速度計がついていますが、昔の船は速度を測るのにひもを流してある時間どれだけ流れたかで測ったそうです。プロ野球の球速はスピードガンという機械で測ります。

100m を走るのに何秒かかるかを競うのはそれが比較的測りやすいからでしょう。しかし、その数値は、大きければ大きいほど遅くなるのですから、速さを測るというよりも「遅さ」を測っているのです。実際その走者が秒速何 m であるかは、 $\frac{100}{x}$ という式であらわせますから、100m 走が何秒であるかを示す数値は速度に反比例しているといえます。

$$\hat{A}(\text{道のり}) = (\text{速さ}) \hat{C}(\text{時間})$$

$$\hat{A}(\text{時間}) = (\text{道のり}) \hat{B}(\text{速さ})$$

と比較してみると乗法と除法が混合しています。道のりに遅さを掛けると時間になるのです。このような、内包量の逆数を逆内包量ということがあります。他の逆内包量の例をあげてみましょう。

電気伝導度と電気抵抗など。ちなみに、抵抗を直列につなぐと流れにくさが足されますが、並列につなぐと流れやすさが足されます。ではコンデンサの静電容量は？

ここの記述に関しては、佐久間修, 何森仁「現代対数対話」(数学セミナーリーディングス, 1990 『新しい高校数学の展望』(日本評論社)を参考にしました。

Chapter12

ベクトルとパラメータについて

12.1 平行移動をあらわすベクトル

ベクトルは向きと大きさを持った量で、有向線分でもあらわすことができます。その線分の始点が違っていても向きと大きさが同じなら2つのベクトルは同じです。三角形が $A B C$ を $A^0 B^0 C^0$ に移す平行移動は、 $\overset{A^0}{A} A^0$ と、 $\overset{A^0}{B} B^0$ と、 $\overset{A^0}{C} C^0$ と書けますが、図にかいてみれば $A A^0 B^0 B$ が平行四辺形となってあらわれ、向きと大きさが同じという実感が持てます。ベクトルは平行移動をあらわす量なのです。もちろん力などの他の量もあらわせますが、ニュートン力学のすごいところは、時間で微分したり質量との積を考えたりすると、これらが関連のある量であることを示してしまうことです。

ベクトルとか解析幾何の幾何への応用としてまず教科書によく記されているのは、

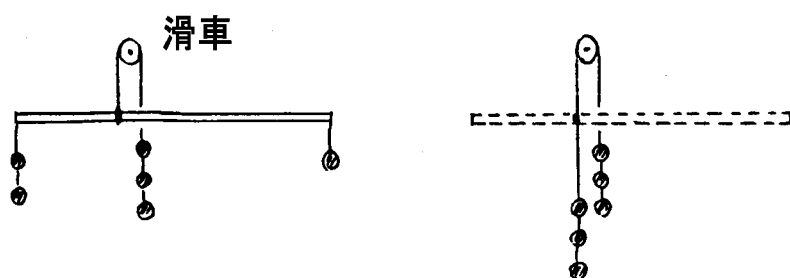


図 12.1: 内分点は2つのおもりの釣り合い

内分点、外分点です。これは何のために学ぶのでしょうか。重さがおもりに比べて無視できる棒の2点A, Bにそれぞれ質量 m, n のおもりをつりさげると2点 n : m に内分する点で釣りあいます。O という観測点で感じるモーメントは、

$$(m+n) \vec{OP} = m \vec{OA} + n \vec{OB}$$

となりますが、これこそ内分点の位置ベクトルに関する公式に他なりません。なお、滑車などを使って力の向きを逆にすると線分ABを n : m に外分する点で釣りあいますが、上の等式の m または n の反数としたと思えばいいのです。

三角形の3つの中点の交点のことを重心と言います。物を1点で釣りあわせることができる点のことも重心と言いますが、前者の幾何学的重心と、後者の力学的重心とは一致します。均質な棒の力学的重心は、中点です。ある部分は中点から同じ距離に同じ重さをもつ部分を必ず持ちます。全部の部分は両者が中点で釣りあうような相手があって、それ以外の部分はないのです。均質な三角形の形をした板がある辺に平行な直線で切って棒にすると、三角形の重さは中線上にのみ分布していると言えます。Aを通る中線を考えて、この三角形ABCの力学的重心は中線AM上にあります。同じようにBを通る中線を考えれば中線BM上にもあります。力学的重心は1つのみですから2つの中線の交点です。これは中線CM上にもあるはず

です。
ところで、三角形の3つの頂点にそれぞれ同じ重さのおもりを吊り下げたときここで釣りあうのでしょうか。点Aを通る棒で三角形を釣りあわせるには棒におもりつき三角形の力学的重心Pがのっている必要があります。この棒とBCとの交点をQとすると、BQとQCの比はC, Bに吊り下げられたおもりの重さの比ですから、QはBCの中点です。同様にBPとCAとの交点はCAの中点、CPとABの交点はABの中点です。この点を三角形の頂点の重心と呼ぶことにすると、三角形の形をした板の力学的重心と一致します。

B, Cの2カ所についているおもりは、Qに合わせて吊り下げても同じ効果を及ぼします。式で書けば、

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \quad \text{で、} \\ \vec{OQ} &= \vec{OB} + \vec{OC} \quad \text{なので、} \\ \vec{OP} &= \vec{OA} + 2\vec{OQ} \quad \text{となります。} \end{aligned}$$

この結果は、重心は中線を 2 : 1 の比に内分することを示しています。

頂点におもりを吊り下げるときにその重さを適当に調整すると、おもりつき三角形の釣り合いの位置 P をいろいろと変えることができます。上にみたように、A P と B C の交点がどのような比に B C を内分するかは、B のおもりの重さ m_B と、C のおもりの重さ m_C の逆比になり、また三角形の面積の比にも一致します。

A Q B : A Q C でも、 P Q B : P Q C でもあるので、
P A B : P C A であることがわかります。これから重要な定理、

$$m_A : m_B : m_C = P B C : P C A : P A B$$

が得られます。

12.2 斜交座標としてのベクトル

ベクトルは、直交座標に対する斜交座標としての意義があります。具体的な幾何の証明問題に即して考えてみましょう。

1. 3点 A (0,3), B (-2,0), C (4,0) がある。

(1) A B C の重心 G の座標を求めよ。 $(\frac{2}{3}; 1)$

(2) A B C の外心 J の座標を求めよ。 $(1; \frac{1}{6})$

(3) A B C の垂心 H の座標を求めよ。 $(0; \frac{8}{3})$

(4) 角 B の二等分線を直線 A B への距離と直線 B C への距離が等しい点の軌跡のうちの一つであることを利用して求めよ。 $(2 + \sqrt{13})y = 3x + 6$

(5) 角 C の二等分線についてはどうか。 $x + 3y = 4$

(6) この三角形の内接円の半径を求めよ。 $\frac{11A - \sqrt{13}}{6}$

(7) この三角形の内心の座標を求めよ。 $(\frac{A + \sqrt{13}}{2}, \frac{11A - \sqrt{13}}{6})$

(8) この三角形の重心、外心、垂心は同一直線上にあるか。

(9) 一般の三角形で、重心、外心、垂心は同一直線上にあるか。

2. A B C の外心を O、重心 G、垂心 H とする。

(1) $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

を満たす P で、A P ⊥ B C となることを示せ。

(2) O H は G によって、1 : 2 の比に内分されることを示せ。

3. (1) 下記のような点 A, B, C, …… を順次とり^[1]折れ線で結んでみましょう。

A (0; 2); B (Ä2; 0); C (Ä4; 0)
 D (Ä4; Ä2); E (Ä2;5; Ä2); F (Ä2; Ä3)
 G (Ä1; Ä3); H (Ä0;5; Ä2); I (2; Ä2)
 J (2;5; Ä3); K (3;5; Ä3); L (4; Ä2)
 M (5; Ä2); N (5; 0); P (4; 2)
 Q (0; 2)

(2) 前問の各点 X (x; y) に対して、 $X^0(x \text{ Ä } y; 2x + 4y)$ を考える。

点 $A^0; B^0; C^0; \dots$ を順次結びましょう。

4. O (0,0), A (2,0), B (0,2) を頂点として持つ三角形 O A B を考えましょう。これの中線は、 $y = x$; $y = \text{Ä}0;5x + 1$; $y = \text{Ä}2x + 2$ 。これらの交点は $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ と容易に出すことができます。(1) 線分 A B の中点は、(1,1) ですから、三角形の重心は中線を 2:1 に内分することを証明したことにはなりませんか。

このひとつの三角形で性質を確かめただけでは、どの三角形でも成り立つとは言えないのです。しかし、一言付け加えると？

(2) 一般の三角形のひとつの頂点を O (0,0) となるように座標をとることができます。他の 2 つの頂点を、(a; b); (c; d) とするとき、これらをそれぞれ (2; 0); (0; 2) にうつす 1 次変換をあらわす行列は？ 1 次変換は線分の長さの比を保存するのではたね。

12.3 直線のパラメータ表示

2 点 A, B を通る直線上の任意の点を P とすると、パラメータ t を使って

$$\overset{\text{Ä}}{O} P = \overset{\text{Ä}}{O} A + t \overset{\text{Ä}}{A} B$$

とあらわすことができます。始点を統一する公式、

$$\overset{\text{Ä}}{A} B = \overset{\text{Ä}}{O} B \text{ Ä } \overset{\text{Ä}}{O} A$$

^[1] 原点 O との混同をさけるため N の次は P になっています。

を用いて、

$$\vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$$

と変形すると、PがABをt:(1-t)の比に内分する点である意味になりますし、
 誌点をAに統一すると、ABとAPとが平行である、つまり、A, B, Pが同一直線
 上にあることを示す等式となります。

tを時刻とみると、t=0のときA、t=1のときBにいる等速運動をしている点P
 の運動の記述であるとも思えます。実際、P(x;y;z), A(a;b;c), $\vec{AB} = (u;v;w)$
 として、tについて解くと、

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w} = t$$

と、空間での直線の方程式が出てきますが、それぞれの成分で、(移動量)÷(速度)
 を計算すると時間となるので等しいと読むこともできるでしょう。

もともと直線は時間をあらかず数直線と位相的に同型ですから、tでパラメータ
 表示できることは明らかですが、同じ意味の方程式でも変形によって印象が違って
 きます。

12.4 内積と外積

Fourier 級数

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

の係数 $a_n; b_n$ を求めるのに、積分

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx; \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

が有効であるように、あるベクトルと基本ベクトルとの内積は、そのベクトルの成
 分を与えます。これは互いに直交する基底をとる場合、他の成分との内積は0とな
 るからです。

二元連立方程式、

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

を。

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と、ベクトル $(5; 3)$ を2つのベクトル、 $(2; 1); (1; 2)$ の1次結合としてあらわす問題とみることができますが、これを内積を用いて解いてみましょう。

$$(5; 3) = x(2; 1) + y(1; 2)$$

$(2; 1)$ に垂直なベクトル、 $(\bar{A}1; 2)$ を考えて、これと上の等式の両辺との内積を考えると、

$$y = \frac{(\bar{A}1; 2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{(\bar{A}1; 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

を得ます。これはクラメルの公式と（当然ながら）一致します。

3元の場合、

$$x(2; 1; 1) + y(1; 2; 1) + z(1; 1; 2) = (7; 8; 9)$$

の x の値を求めるには、この等式の両辺と、 $(1; 2; 1)$ と $(1; 1; 2)$ との外積を求める必要があります。

【 問題 】

1. 三角形 ABC の内心を I , 外心を J , 垂心を H , 角 A の内部にある傍心を I_A とすると、

$$IBC : ICA : IAB = a : b : c$$

$$JBC : JCA : JAB = \sin^2 A : \sin^2 B : \sin^2 C$$

$$HBC : HCA : HAB = \tan A : \tan B : \tan C$$

$$I_A BC : I_A CA : I_A AB = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

であることを示せ。

2. 一辺の長さが 2 の正四面体 $OABC$ で、

$$\vec{OA} \cdot \vec{AP} = 6; \quad \vec{OB} \cdot \vec{AP} = 3; \quad \vec{OC} \cdot \vec{AP} = 4$$

を満たす、 \vec{p} を、 $\vec{OA}; \vec{OB}; \vec{OC}$ であわせ。

3. 3 点、 $(2; 1; 1); (1; 2; 1); (1; 1; 2)$ を通る平面の方程式をなるべく多様な方法で求めよ。
4. 前問で求めた平面に関して、原点と対称な点の座標を求めよ。
5. 正四面体の 2 面角と、正八面体の 2 面角とは互いに補角をなすことを、ベクトルの計算によって示せ。 ($\vec{u}; \vec{0}; \vec{0}$); ($\vec{0}; \vec{u}; \vec{0}$); ($\vec{0}; \vec{0}; \vec{u}$); ($1; 1; 1$); ($1; \vec{A}; \vec{A}$); ($\vec{A}; 1; \vec{A}$); ($\vec{A}; \vec{A}; 1$)

ベクトルを用いた証明のアルゴリズム

1. 位置ベクトルの始点を決める。
2. 基本となるベクトルとして平面の場合、2 点の位置ベクトルを決める。
3. 問題に出てくる点の位置ベクトルを前項の基本となるベクトルであらわす。
4. 問題の条件を式であらわす。
5. 計算を実行する。
6. 計算の結果を解釈する。

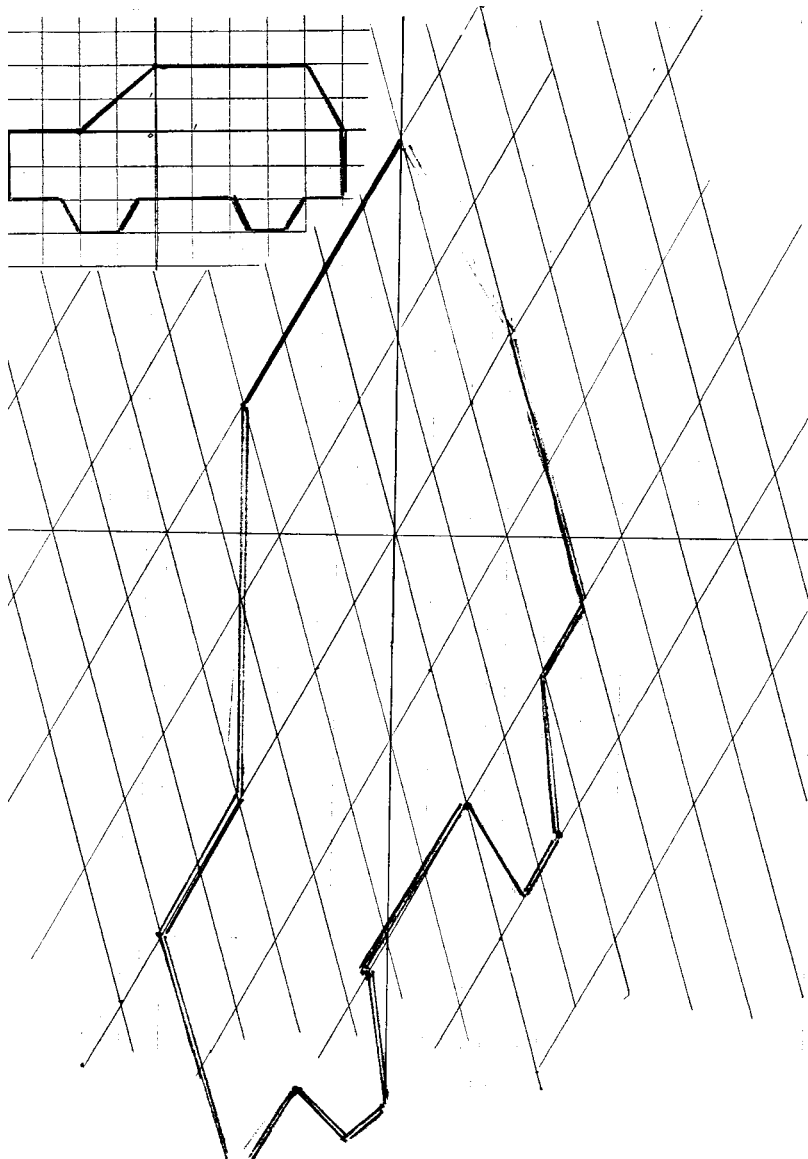


図 12.2: 斜交座標としてベクトル

Chapter13

代数を用いた作図

13.1 四則の作図

代数の答案と幾何の答案との違いってありますよね。代数の方は、問題を式を使ってメモして、方程式を立てることができればあとは機械的に解いていくことができます、解いていく過程が答案そのものになります。それに比べて幾何は、10.4節に述べたように図でわかってからでないとな案が書けないのです。

そこで、代数のこのような特長をいかすことができないか。デカルト (Renè Descartes) の発想は言わばこのようなことにあるのでしょうか。求める点がある線分上にあるとき、その線分の端からの距離を求めることができればその作図題は解けたことになるでしょう。その距離が満たす条件を二次方程式にあらわすことができれば幾何の公法、つまり定規とコンパスとを有限回使って作図することができます。

なぜかって？二次方程式の解は、四則と平方根を使ってあらわすことができます。ですから、これらの演算の結果が作図できることを示せばよいですね。加法は2つの線分を合併すればいいのですから、コンパスで一方の線分の端に他方の線分と同じ長さをコンパスで移して延長する。減法は向きを逆に。乗法、除法は次の図のように相似の性質を使えばできます。 $a \div b$ を作図するなら、次のような手順を踏みます。

1. O を共有する2つの半直線上に $OA = a$, $OB = b$ を満たすような2点 A , B をとる。

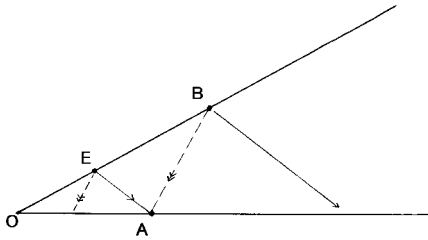


図 13.1: 2数の積の作図

2. 半直線OB上に、 $OE = 1$ を満たす点Eをとる。
3. Bを通り、直線AEと平行な直線とOAとの交点をCとすれば、OCが求める長さである。

(問) では、2数の商を作図するにはどうすればいいでしょうか。

13.2 方巾の定理

残るは平方根の作図です。そのためには次の方巾(ホウベキ)の定理を証明しておいた方が良いでしょう。ある円の円周上にない点Pを通る2本の直線と、その円との交点をA, B; C, Dとすると、2本ずつの線分の長さの積が等しいというものです。式でかけば、 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 。証明は、Pが内部にあるか外部にあるかによって違いますが、円周角の定理などによって、三角形の相似を利用します。

少し脱線になりますが、点Pが円の外部にあって、直線ABが円の中心を通り、直線CDが接線、即ちCとDが限りなく1点Tに近付いたときのことを考えると、三平方の定理の別証を得ることができます。どこに直角三角形があるかですって? POTですよ。

13.3 平方根の作図

長さaの平方根を作図する手順のみを記します。

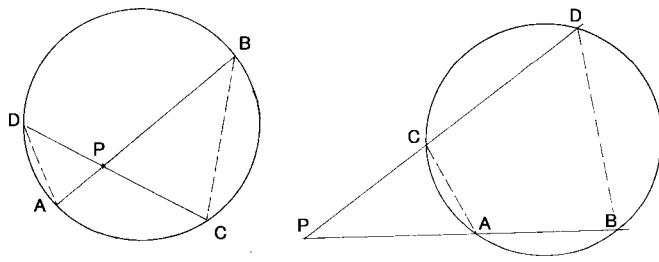


図 13.2: 方巾の定理の証明は三角形の相似を利用

1. 長さ a の線分 AB を引き、線分 AB の延長上に、 $BC = 1$ を満たす点 C をとる。
2. 線分 AC を直径とする円をかく。この円の中心を O とする。
3. B を通り、 AC に垂直な直線と円との交点を P, Q とすると、 BP の長さが求めるもの。

これは、このような方法によって少なくともかけることを保証しただけで、これよりも楽に作図できる場合もあります。

(問1) 円外の点 P から円への接線の作図法を述べてください。(もしもかけたとすると?の図をかいてみましょう。円の中心を O とすると、 OP を直径とする円を書き入れると?)

ところで、2つの正の数、 $a; b$ の相加平均は相乗平均よりも大きいことを図で示すことができます。下の図で、 $AB = a; BC = b$ で、 AC を直径とする円をかいています。どこが相加平均で、どこが相乗平均でしょう。また、 P を接点とする接線へ点 B から垂線を引くとその長さが調和平均になることを示して下さい^[1]。

13.4 フェルマーとデカルト

直交座標のことを、デカルト座標ということがあります。ではデカルトが解析幾何の創始者かと言えばそうとも言えないようです。白水社が『デカルト著作集』を

[1] 黒田俊郎, 1987 「真保の定理」(数学セミナーリーディングス『新しい高校数学の展望』(日本評論社))
仁平政一, 1991 「不等式の図形的証明」(『日本数学教育学会誌』vol.73, No.7)

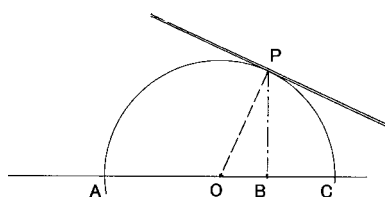


図 13.3: 相加平均と相乗平均

出していますが、その第1巻に「幾何学」が含まれています。ちなみにその序論にあたるのが、文庫本などにも収められている「方法序説」です。

中村幸四郎, 1980 『近世数学の歴史』(日本評論社)p.40-41 によれば、座標軸にあたるものを1本とったのは、省略代数を用いてはいましたがフェルマの方が先ですし、座標という言葉はデカルトよりも後のライプニッツによるものです。

歴史的に見ると、幾何の問題を「人間の理性を正しく導き、もろもろの学問において真理を求めるための方法」に基づいて考察したのですが、今の学校での扱われ方とはかなり隔たりがあるようですね。

直線 $2x + 3y = 5$ などという言い方をしますが、よくよく考えると、 $2x + 3y = 5$ が、幅がないとか、まっすぐだとかの性質のある幾何の対象の直線であるとは、ちょっとおかしな感じがします。これは、座標平面上に $f(x; y) = 2x + 3y = 5$ を考えてはじめて上述の図形としての直線になるわけで、この条件をあらわす方程式の数学的な性質を利用して、図形の性質を考察しているのです。

このようになるまでに数学の歴史を要しています。求める線分の長さを代数の方程式解くことによって知るという代数と幾何との関わり。x; yとの関わりを座標平面調べると関数と座標との関わり。これえらが混同されている傾向がなきにしもあらず。そのため、関数の勉強のはずがいつのまにか解析幾何になっていて、関数っていったいなんだっけという生徒の感想もみられます。両者を区別して教えた方がいいのです。

【 問題 】

1. 3大作図不能題とは何か調べてみてください。
2. 中1で学ぶ3つの基本作図とは何でしょう。
3. 高等学校の入試問題や、大矢真一,1975『ピタゴラスの定理』(東海大学出版会)の第9章などを読み、求める線分の長さを代数の方程式を解くことによって知る問題例を調べてください。

次の章との関連で問題を補充しておきます。

・ ABC において次の等式を証明せよ。

$$1. (1 + \sin A - \cos A)^2 + (1 + \cos A - \sin A)^2 = 4(1 - \sin A \cos A)$$

$$2. (a \sin A + b \sin B + c \sin C)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$3. \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

$$4. c(a \cos B - b \cos A) = a^2 - b^2$$

$$5. \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{c \cos B}{b} - \frac{c \cos A}{a}$$

$$6. a - b \cos B + c \cos C$$

$$7. a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$$

$$8. \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$$

・ 次の等式を証明せよ。

$$1. \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$$

$$2. \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} = \tan \frac{x}{2}$$

・ t が実数全体を動くとき下記の動点 P はそれぞれどのような軌跡を描くか。

$$1. P(\cos 2t; \sin t)$$

$$2. P(\sin t + \cos t; \sin 2t)$$

memo 1. 左辺を簡単にすると？ 2. 正弦定理で角を辺に。 3.-5. 同様に余弦定理。

6. 左辺を第 1 余弦定理でという別解もある。 7. 一番上の 1. に使った性質は？

8. 迷わず、 $\frac{\sin}{\cos}$

・ 角の大きさの最小単位となっているものに注目。特に、(2) では、最小単位を \bar{a} などとおくと？

・ $x = 1 - 2y^2$ と、 $x^2 = 1 + y$ ですが、変域は？

Chapter14

公式とアルゴリズム

14.1 発見法

ポリアの3部作^[1]のなかに、『数学の問題の発見的解きかた』^[2]という本があります。そこで九章算術で「方亭」(ファンチン)と言われている図形(四角錐台)の体積を求めると言う例題がでています。九章算術では四角錐、三角柱、四角柱と9つの部分に分けて求めています。ポリアは「与えられているものは何か」「求めようとしているものは何か」という問から始めます。

ここでは、上底面である正方形の一辺の長さ a と、下底面である正方形の一辺の長さ b ($a < b$ ということにします) と、そして、錐台の高さ h とが与えられていて、この錐台の体積 V を求めようとしてしています。そこで、メモ用紙の一番上に V とかき、一番下に、 $a; h; b$ と書くことにしましょう。

次にポリアは、「求めたいものは、何を知ることによって求めることができるか?」「与えられたことから何がわかるか」という問を發します。この場合、側面を延長して四角錐を作ったときに、四角錐全体の体積 B として、延長した部分の体積を A とすると、 V は $B - A$ として求めることができます。そこで、 V の下に $A; B$ を書いて、 V と線で結んでおきます。

このような作業を繰り返して、一番上と一番下とをうまくつなげることができたとき、その問題は解けるのです。このように、「求めるべきもの」「与えられているも

[1]ポリア,1944/柿内賢信訳,1954『いかにして問題をとくか』(丸善)
ポリア,1953/柴垣和三雄訳,1959『数学における発見はいかになされるか』(丸善)と次注

[2]ポリア,1961/柴垣,金山訳,1967(みすず書房)

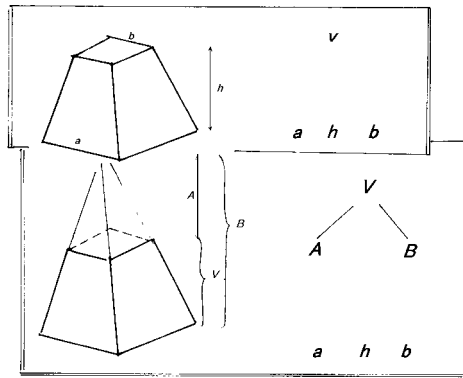


図 14.1: 方亭の求積

の」「使える手段」からなる「問題空間」を考えて問題解決にあたるという手法は、人工知能研究のなかに多く取り入れられてきています。

そして、ポリアは条件を変えてみることを、似たような問題を見たことがあるかなどの、問題固有ではない一般的な問い掛けやヒントを提供しています。

14.2 作図

問題を解こうとして解けないときに陥りやすい思い違いは、「ああ僕は運が悪いんだ」と、不確定要素のせいにしたたり、「ああ僕は頭が悪いんだ」と先天的な要素のせいにしたたりすることです。数学を勉強することによって頭がよくなったり、センスを磨いたりしたい。問題が解けたり解けなかったりすることはありますが、より問題が解ける確率が高くなるように学習したいものです。そのような努力をしているのか、これからするのかという学習者自身の問題を責任転嫁してしまうのです。教える側ではどうでしょう。スポーツの世界では不合理な根性主義に代って科学的なトレーニングが採用されてきました。数学の練習はどうでしょうか。鍛錬主義がないとはいえません。どのようなトレーニングをどのような順番で行なってどのような学力を伸ばすのかということが意外と意識されていないように思えます。

3点を通る円をかくことは比較的簡単です。3点を頂点とする三角形の外接円をかけばいいのです。2点を通る円は？これは無数にあります。しかしどのような円でもいいわけではありません。その中心は、2点を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるべきです。また、3直線に接する円をかくことも比較的簡単です。それらを3辺とする三角形の内接円をかけばいいのです。では、2直線に接する円は？これは無数がありますが中心は2直線のそれぞれを辺とする角の2等分線上にあるべきです。このように点を通ったり、直線に接したりするような円をかけ、あるいは、直線の代わりに円に接する円をかくなどという作図題には、いろいろなバリエーションがありますし、解法にも例えば3円に接する円をかくものには反転を利用するなどいろいろな解法があります。しかし、これらの問題に対する一般的なヒントとして、問題の条件の一部だけを満たすものはないか、簡単になる特殊なものはないか、問題を少しかえてより簡単なものにできるかなどに考えてみましょう。顕著な例としては、A B を満たす点を求めるには、まず条件 A の軌跡を求めることができ、B の軌跡を求められれば、それらの交点を求めればよいのです。

その点で言うと、以下に紹介するような作図題を、「問題を既に見たことがあるので解ける」というレベルで扱うならばあまり教材の価値はないでしょうが、前節でみたような、ポリアの問題固有ではない一般的な問い掛けを経験する機会としては有用なものとなるでしょう。例えば、2本の直線に接してある点を通る円をかくことができますか^[3]？そして、2本の直線に接してある円に接する円をかくことができますか？もし、後者がわかりにくいときは、もしかけたとして「ある円」の半径を少しかえるとどのようなことが起こるでしょうか。

人工知能の問題空間では、与えられたもの、求めるもの、利用できる手段が明確に定義されていることが多いのですが、上のような問題解決の場合、問題空間がそれほど明確ではありません。むしろ、必要に応じて問題解決の径を探すという創造的な作業が重要となるでしょう。そしてそれは数学者が数学を研究するという創造性と一脈通ずるものでありましょう。

[3] 2本の直線に接する円はその2直線の交点を相似の中心とする互いに相似な円全体ですが、1つ任意なものをかいておいてそれと相似なもので点を通るものをかけばいいのです。

14.3 証明の計算化

よく、計算は比較的得意だけど証明がねえという生徒がいます。計算は教わったとおりに公式を適用していけばいいのだけど、証明は何を使っているのかわからないと。

でも、そうでしょうか。高校などででてくる「等式の証明」は多くの場合、答えのわかっている計算問題に過ぎないと思われまます。計算とは普通複雑なものをやさしくすることをいいます。A = B を証明するなら、難しい方を計算して、やさしい方に等しいと言えればいいのですが、どちらも中途半端に難しいときなどは、A = B を計算して、0 となることを示せばいいのです。また、f(x) > g(x) を示すなら、f(x) - g(x) の最小値 m を求めて、m > 0 であることを確かめればいいのです。このような基本技能の説明なしにいきなり証明をさせられたのでは生徒も戸惑うでしょう。

もちろん上の方法は少なくとも解けるという注意であって、他にもっとスマートな別解がありえましようし、また、細かなバリエーションや、計算にどうしても移しにくいものもあるでしょうが、だいたい解けるという自信を練習問題に取り組む前に付けさせたいものです。

<p style="text-align: center;">次の等式を証明せよ。</p> $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$
--

[証明] f(n) = (右辺) - (左辺) とおく。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(1) &= \frac{1(1 + 1)}{2} - 1 \\
 &= 1 - 1 \\
 &= 0 \\
 (2) \quad f(n + 1) - f(n) &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - (1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1)) \\
 &\quad - \left[\frac{n(n + 1)}{2} - (1 + 2 + 3 + \dots + n) \right] \\
 &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - \frac{n(n + 1)}{2} - (n + 1) \\
 &= (n + 1) - (n + 1) \\
 &= 0 \\
 f(n) &= f(n + 1)
 \end{aligned}$$

(1),(2) より数学的帰納法によって、すべての自然数 n で、f(n) = 0。よって、すべての

自然数 n で、(左辺) = (右辺) 【証明終】

1. 次の等式がすべての自然数 n に関して成り立つことを示せ。

$$(a) 2 + 4 + 8 + \dots + 2n = n(n + 1)$$

$$(b) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$$

$$(c) 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n + 2) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 7)$$

$$(d) 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1)$$

$$(e) 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

$$(f) 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n + 1)$$

$$(g) 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$(h) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$$

$$(i) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$$

$$(j) \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n + 1}{n^2 \cdot (n + 1)^2} = 1 - \frac{1}{(n + 1)^2}$$

$$(k) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n - 1) \cdot 2n} = \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{n + n}$$

$$(l) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}$$

$$(m) (n + 1)(n + 2)(n + 3) \dots (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$$

2. 次の不等式を証明せよ。ただし n は自然数とする。

$$(a) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n - 1} > \frac{2n}{2n + 1}$$

$$(b) (n \geq 2 \text{ のとき}) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > \frac{3}{2} - \frac{1}{n + 1}$$

$$(c) 3^n > 3n$$

$$(d) \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

$$(e) 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} < 2^{\frac{p}{n}}$$

$$(f) (1 + 2 + 3 + \dots + n)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) > n^2$$

$$(g) (a + b)^n = a^n + b^n \quad (a > 0; b > 0)$$

$$(h) \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^n \quad (a > 0; b > 0)$$

3. n が自然数のとき、 $x^n + \frac{1}{x^n}$ は、 $x + \frac{1}{x}$ に関する整式で表せることを示せ。

4. n が自然数のとき、

(a) $(1 + \sqrt[2]{2})^n = a + b\sqrt[2]{2}$ となる整数 $a; b$ があることを示せ。

(b) $(1 + \sqrt[2]{2})^n = a + b\sqrt[2]{2}$ ならば、 $(1 - \sqrt[2]{2})^n = a - b\sqrt[2]{2}$ であることを示せ。

5. n が自然数であるとき、 $(1 + \sqrt[2]{2})^n + (1 - \sqrt[2]{2})^n$ は、常に自然数であることを証明せよ。

6. n を自然数とする。 $n^3 + 5n$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

7. $a_1 = 1; a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$ で定義された数列について、次の間に答えよ。

(a) $a_2; a_3; a_4$ を求めよ。

(b) a_n を予想して、 n をもちいて表せ。

(c) (2) で予想した結果が正しいことを、数学的帰納法で証明せよ。

8. 実数 $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ の絶対値が 1 より小さいとき、不等式、

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n + n > x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \quad (n \geq 2)$$

を証明せよ。

9. x^n を $(x - 1)^3$ で割ったときの余りを求めよ。

14.4 アルゴリズム

自信のないとき、あるいは試験まで時間がないとき、生徒は公式を暗記することに最後の望みを託します。それはそれで、何にも勉強しないよりはましなのでしょう

が、公式そのままでは生きていない、つまり使える形ではない場合があります。例えば、展開の公式、

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

は、このままの公式としても使いますし、右辺から左辺をみると因数分解の公式ですが、ある項を移項した次の形も使いでがあります。

1. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ 対称式は基本対称式であらわすことができるという基本的な例。
2. $x^2 + 2px = (x + p)^2 - p^2$ 平方完成の公式。

また、第2余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ は、右辺から左辺をながめれば、2辺夾角がわかっているときに、既知の角の対辺を知るための公式となりますが、 $\cos A$ についてとけば、三辺がわかっているときにある角を求めるための公式となり、これを逆にながめれば、証明問題で扱いにくい角の大きさを辺の長さに変換する公式になります。

公式を順番に適応して難しい式を簡単にするアルゴリズムを知っているだけでかなりの自信が持てます。場合によっては別解があってより簡単に解ける場合もありますが、ともあれ計算問題と同じに着手ができるのですから。また、特に三角関数は余角、補角のものまで公式にしていますが、解く場面に即して「 α の大きさにかかわらず、 $\sin \alpha$ は、 45° 以内の正の角 α の正弦あるいは余弦（またはそれらの反数）であらわすことができる。」という定理を知った方が、いくつも意味もわからずに公式を暗記するよりも有益でしょう。

【 問題 】

1. 三角関数の加法定理の証明についてなるべく多くあげてみてください。
2. 三角関数が学ばれる文化財的な意義としては、三角形の他条件の決定とフーリエの定理のための基本的な道具との2つをあげることができるでしょう。
(1) 三角形の決定条件としては、二辺夾角、二角夾辺、3辺がありますが、これらを知ることによって三角形の他の要素をどのように求めることができます

か？

(2) $\sin^2 x; \sin^3 x$ をフーリエ級数であらして下さい。

3. 対数関数に関する式を簡単にすることを練習させる B 4 版一枚プリントを、例題を出してからそのアルゴリズムを練習させる問題を記すという形式で作ってください。

Chapter15

微分・積分の基礎知識

15.1 時間と速度

子どもにとって速さの概念は追い越しの直観によって得られ、時間のそれに先行することが知られています^[1]。しかし、数学では移動距離を所要時間で微分することによって速度を得ます。その微分の操作を定義するために極限について考えますが、その全体像がわからないと何のためにこのようなことをやっているのかわかりにくい場所となってしまいます。

例えば、落としてから x 秒後に手から y m 下にボールがあるとおくと、適当な距離の単位を決めれば、 $y = x^2$ という数式で $x; y$ の関係が記述できるでしょう。では、これの $x = 3$ での速度を考えてみましょう。このような課題を具体化させて表計算ソフトで数値を計算してみます。

A列は時刻、 $x = 0$ から $x = 5$ まで、0.5 秒刻みで 1 行ずつ空けてとります。あとでその区間の差を考えたいからです。B列はその時刻の y の値。 x の値がない行は y も空白にしておきます。C列は、各行の y の変化量、D列にその時間 (0.5 秒間) の平均速度ができるようにします。表計算の式による定義とコピーとを使ってなるべく効率よく作りましょう。平均変化率の推移をみても刻一刻をボールが速くなっているのがわかります。ここでは、2.5 秒後から、3 秒後までとか、3 秒後から 3.5 秒後までの平均速度しかでていません。 $x = 3$ での速さを考えるにはどうしたらよいで

[1] Jean Piaget, 1950/田辺振太郎他, 1976 『発生的認識論序説 第 II 巻 物理学思想』(三省堂) 第 IV 章 §4 運動と速度

しょうか。

こんどはシートをかえて、計測時間が何秒ごとかを、A1 というセルにいれることにしましょう。一応 0.5 にしておきます。ここでの目的は、 $x = 3$ から $x = p$ までの平均速度を p をいろいろにかえて求めてみることにあります。A 列の画面に出ている真ん中あたりを、3 にしましょう。そのすぐ下を Excel なら、[すぐ上のセル] + \$A\$1 などと絶対指定を用いて定義し、それを下までコピーします。そしてすぐ上は、[3 を入れたセル] ÷ \$A\$1 としてこれも A 列の上半分へコピーします。これで、3 の前後の時刻 p が 0.5 秒ごとにとることができました。B 列には、 x の変化量を、C 列には y 、D 列には y の変化量、E 列には平均速度が出るようにします。

さあ、どんなことが起こったのでしょうか。 $p = 3$ のところに変な表示が出ていますが、前後の関係から、その平均速度は 6 でありそうだと想像できます。このように前後の関係から想像できる値のことを極限というのです。では、なぜそう想像できるのでしょうか。もちろん、この例では、 $y = x^2$ というかなり単純な関数ですから想像しやすかったのですが、他の $y = x^3$ などの場合ではこのままでは想像しにくいですね。\$A\$1 の値、0.5 を、0.1, 0.05, 0.01, … などと小さくしていけば、 $p = 3$ のときの平均速度、即ち $x = 3$ での瞬間速度が想像しやすくなります。実は、そのどちらの場合も、式で平均速度をあらわせば、分母、分子とともに $(p - 3)$ があるので、約分できたのです。

この分母にある 0 に近づく因子が分子にもあるときは約分するというのが、不定型の極限計算の定石ですね。無限大の因子を約分することもあります。

(問 1) 無理関数の場合、約分すべき因子が見出しにくいので、0 に近づく無理式の部分の有理化を行ないます。三角関数の場合、 $x \rightarrow 0$ のとき $\sin x \sim x$ ということが基本命題となりますが、 $1 - \cos x$ は、 $\sin x$ の無理式とみれます。だから有理化するために $1 + \cos x$ をかけるのは理にかなっています。このような極限の計算の諸技法をまとめてみてください。

微分は、ある関数 f に対してその変化率に注目することによってある関数 f' を対応させるものですから、関数の関数への対応と言えます。

15.2 逆微分と区分求積法

面積を区分求積法で求めることが、ライプニッツの記号 $\int_a^b f(x)dx$ の由来ですからそれを書くときにも多かれ少なかれそのようなことを意識するのではないかと思います。しかし、教科書によってはこの記号を、どの関数を微分すればこの関数になるかという逆微分の記号として導入している教科書もあります。確かに面積が逆微分で求まることは大きな発見であったのですが、それがやはり大きな発見であると感じるためには、区分求積法での導入が好ましいように思えます。区分求積をいくつかしてから、上端の値に関する関数とみて、その関数を微分するのです。

もっとも、区分求積法を使うとなると、数列の和の記号 (\sum) の極限という分りにくいものを扱わないといけないという難所がありますが、面倒な計算を表計算ソフトなどを用いて切り抜けるというのもひとつの手でしょう。

(問2) 139ページのように、 $y = x^2$ と $x = 1; y = 0$ とで囲まれた部分の面積を求めることを考えましょう。0.1 間隔で引かれた方眼に、 $y = x^2$ のグラフを書き入れた B5 版のプリントの原稿を TEX で作るには、どのようなソースを書くべきでしょうか。

(問3) 面積をもとめる方法として、工作用紙をその大きさに切って単位面積のものとの重さの比を考えるとという方法をやってみましょう。

(問4) $f(x)$ が 1 次関数のとき台形の面積の公式で定積分の値が求まりそうですが、注意すべき点は？

各辺の長さにあたる部分が正の値となること。

15.3 グラフの典型と応用

グラフは、いろいろな量を $x; y$ という軸であらわすことができるので、強力な応用可能性があります。積分では面積という典型例で導入されますが、他の量に応用するには少々工夫が必要です。体積は断面積の厚み方向の積分となりますが、スライスの厚みを変えずに奥行が単位長さのものを積むとしたら、面積に奥行である 1 をかけたものとして体積が把握されますが、他の場合、区分求積での感覚、つまり式や細かく切って厚みをかけて足しあわせるという操作の共通性を把握させたいと

ころです。

また、面積はマイナスを考えないのが普通ですが、積分の値がマイナスであることが意味をもつ場合があります。そこで、典型例としてグラフの面積を考えてましたが、改めて2つのグラフのy座標の差（絶対値）を使って、応用例としての面積がでできます。

微分の場合でも、接線の傾きが典型例としてできながら、接線の方程式となると、方程式と直線の、 $y - q = m(x - p)$ の m が化けただけですが、接点が $(t; f(t))$ である接線の公式 $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ は改めて公式としてまとめておく必要があるでしょう。いろいろなものがでできますが、指導の系統を単元を通じてしっかり考えたいものです。

15.4 グラフをかくと言うこと

グラフをかけという問題が多くみられます。しかし、古代ギリシャの作図の公法ではかけないに決まっているものをかけというもおかしなものですよね。

ラング^[2]はこの点を次のように明確にしています。

われわれは特に曲線の次のような状態に着目しよう。

1. 座標軸との交点 .
2. 臨界点 .
3. 増加する範囲 .
4. 減少する範囲 .
5. 最大点および最小点（極大点および極小点を含む）
6. x が正または負で非常に大きくなる時の状態 .
7. その近くで y が正または負で非常に大きくなるような x の値
8. 曲線が下に凸あるいは上に凸である範囲 .

[2] Serge Lang, 1973 / 松坂和夫・片山孝次, 1978 『解析入門 原書第3版』（岩波）第6章 曲線をえがくこと

旧版では、対称性とか漸近線の有無やその方程式などもあったように思います。こうしてみると、グラフ電卓やパソコンで図をかかせてみるよりも手間のかかる作業を「グラフをかけ」は命じていると思えます。

しかし、「グラフより」で得られる情報は、多くの場合増減表によって要約されるようです。即ち、

1. 極値であるならそこで導関数の値が 0 のところである。
2. その区間で微分可能であるならば最大・最小は極値であるか区間の端である。
3. 連続な関数の場合、極値をとる箇所が単調な区間の境界である。

という性質があるので病的な関数はともあれとして、関数のふるまいの多くの部分を増減表をかくことによって知ることができるのです。つまり関数のふるまいを調べる上でずっと簡便な手段が増減表を作ることであると言えるでしょう。

次の定理はあまり強調されませんがかなり使いでのあるものです。

い より強力な中間値の定理 え

関数 $f(x)$ が $a < x < b$ で連続かつ単調で、 $f(a) \cdot f(b) < 0$ であるとき、 $f(x) = 0$ をみたす x が $a < x < b$ の区間にただひとつ存在する。

い え

増減表によって関数が定義されている区間を単調ないくつかの区間に分けることができれば、この定理は方程式の解の個数や解の大小関係の判定に使えます。具体的な問題をあげてみます。

1. $2x^3 - 3x^2 - 12x + k = 0$ が次のような解を持つときの定数 k がある範囲をそれぞれ答えよ。 ($k < -7$; $k > 20$); $0 < k < 20$
 - (a) ひとつの実数解と 2 つの虚数解
 - (b) 異なる 2 つの正の解とひとつの負の解
2. 曲線 $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$ に対して、点 $(0; a)$ から相異なる 3 本の接線を引きることができるように実数 a の範囲を求めよ。 ($-7 < a < 20$)
3. 曲線 $y = x^3 + 3x$ に対して、点 P から 3 本の接線が引けるといふ。このような点 P が存在する範囲を図示せよ。

【 問題 】

1. 「 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ を $x \times x$ で微分したら \sim になった。」に当てはまる量の組を 3 組以上挙げてください。
2. 微積分を知る意義と思われることをいくつかあげてください。
3. x についての方程式 $2x^3 - 3x^2 + ax - 3a = 0$ が相異なる 3 つの実数解を持つときの a の条件を求めてください。
4. $x^2 + y^2 = 1$ のとき、 $x + y$ の最大値を求めて下さい。
5. 本文中の (問 2) はできましたか？

Chapter16

離散数学と確率

16.1 パスカルの三角形

多項式 $(x + y)^n$ を展開したときの係数を並べたものをパスカルの三角形といいます。1行目は、 $(x + y)^0 = 1$ 、2行目は、 $(x + y)^1$ をあらわしているのですが、3行目は、 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ですから、この係数を並べて 1; 2; 1。これに $(x + y)$ を掛ければ次の4行目が得られます。筆算で係数だけを書けば同じものをコピーして、ひとつずらしてまたコピーして足す。つまりひとつ上の行の隣どうしを足せばいいのです。

┌────────────────── パスカルの三角形 ───────────────────┐

1	2	1																		
x)	1	1																		

1	2	1																		
1	2	1																		
1	3	3	1																	
1	6	15	20	15	6	1														

└──────────────────┘

(問1) このパスカルの三角形をみて気付くことを5つ以上あげてみてください。

16.2 数列の和と階差

パスカルの三角形の一番上の1から左下へ向っての1ばかりのものを第0段、次の自然数が順に並んでいる段を第1段と呼ぶことにすると、第2段は1からその左上の自然数までの和になっています。一般に、第 $(k+1)$ 段は第 k 段のシグマになっており、逆に第 $(k-1)$ 段は、第 k 段の階差数列になっています。

このパスカルの三角形は、 ${}_n C_k$ を書き並べたものですが、(0)のように示したように値が0なのでかいていなかったと解釈して、それぞれの段を上延ばして、ひとつだけ1の並んでいる行を第0行と呼ぶようにすると、第 m 段の上から第 x 行目の数は、 0 から ${}_x C_m$ となっています。これを、 $\frac{x^{(m)}}{m!}$ [1]と書けば、次のような微分・積分の公式に酷似した「差分・和分の公式」を得ます。

$$(x+1)^{(n)} - x^{(n)} = nx^{(n-1)}; \quad \sum_{x=1}^{n-1} x^{(m)} = \frac{1}{m+1} n^{(m+1)}$$

(問2) $\sum_{k=1}^n k^m$ ($m=1; 2; 3$)の結果とその図形的な証明を調べなさい。

(問3) 積分の公式、 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ に対応する和分の公式は何でしょう。

数列の和の公式はかなり恣意的なものに映りますが、これは連続量の記述に適したべき級数で無理に離散量をあらわそうとしたため、上でみたように「差分・和分の公式」はかなりきれいなものになります。逆にべき級数を $x^{(n)}$ の一次結合としてあらわすことができれば、 $\sum_{k=1}^n k^m$ の結果を m が自然数であれば求めることができます。

例えば、 $m=4$ のとき、

$$x^4 = a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2) + ex(x-1)(x-2)(x-3)$$

を満たす定数 $a; b; c; d; e$ をまず求めます。左辺を x で割ったときの余りをみて、 $a=0$ 、この商を、 $(x-1)$ で割ったときの余りをみて、 $b=1$ 、さらにこの商を $(x-2)$ で割ったときの余りをみて、 $c=1$ などと連続的に組み立て除法を用いて求めることができますが、上の等式が恒等的に成り立つことから、いくつかの x の値を代入

[1]この $x^{(m)} = x(x-1)\cdots(x-m+1)$ は、順列 ${}_x P_m$ ($x=1; 2; 3; \dots$)を $x < m$ の場合にも拡張したものです。

試みて、 $a; b; c; d; e$ に関する連立方程式を解くという「未定係数法」も用いることができます。

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ のとき、} & 0 = a \\ x = 1 \text{ のとき、} & 1 = b && \text{を解いて、} b = 1 \\ x = 2 \text{ のとき、} & 16 = 2 + 2c && \text{を解いて、} c = 7 \\ x = 3 \text{ のとき、} & 81 = 3 + 6c + 6d && \text{を解いて、} d = 6 \end{aligned}$$

そして最高次の係数を見比べて、あるいは x の他の値を代入して解いて $e = 1$ などとできるわけです。この場合は、 x の値が 5 つの場合、もしくはそれと同等な条件について考えましたが、一般に、 $f(x)$ が m 次式するとき、 $x = x_0; x_1; x_2; \dots; x_m$ の $(m + 1)$ 個の x の値について、 $f(x) = 0$ が成り立つならば、恒等的に 0、即ち ($x \in \mathbb{R}$) $f(x) = 0$ が成り立ちます。証明は因数定理によります。

(問 4) $\sum_{k=1}^x k^4$ を求めなさい。 $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{30}n$

ところで、 m 個の点、 $(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots; (x_m; y_m)$ をそのグラフ $y = f(x)$ が通る高々 $(m - 1)$ 次の関数はただひとつあります。以下に述べる Lagrange の補間公式がそれです。

$$f_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_m)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_m)}$$

の $x = x_1; x_2; x_3; \dots; x_m$ のときを考えてみて下さい。このような関数、 $f_1; f_2; f_3; \dots; f_m$ を作る事ができれば、

$$f(x) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + \dots + y_m f_m(x)$$

が求める関数です。

(問 5) $(0; 1); (1; 2); (2; 4)$ を通る 2 次関数を $f(x)$ とする。 2^3 と $f(3)$ の大小を比較しなさい。

16.3 漸化式

書店でパラパラとめくってホホウと感心したフレーズがあるとその本を買いたくなるものですね。私にとって次のもの^[2]がそれでした。

$f(i)$ の最も満足すべき形は、よく知られた関数のみから構成され、かつ和の記号 (\sum) を用いていない完全に明示的な閉じた式である。

[2] R. T. Stanley, 1986 / 成嶋弘他, 1990 『数え上げ組合せ論 I』(日本評論社)

先に計算されているいくつかの $f(j)$ からなる項で表される $f(i)$ に対する漸化式が与えられていてもよい。AAAこれは明示的な答えであるが、無理数を含んでいるので、漸化式 $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ よりもよい答えであるかどうか意見のわかれるところである。

等差数列、等比数列も、一般項をあらわす式よりも、そのなまえがあらわす性質をより忠実にあらわしているのは漸化式だと思えます。もちろん、一般項であらわすことによって等比数列は自然数を定義域とする指数関数だと知れ、等差数列に比べてかなり急速な振る舞いをみせることがわかります。借金の金利が意外^{3]}とかさむことなど、知る必要性をみることができるでしょう。

(問6)隣接2項間の漸化式に対応する微分方程式の解法は、非斉次型の解法です。では隣接3項間の漸化式の解法はどのような解法に対応しているのでしょうか。

16.4 確率

古来場合の数は、確率の値を求めるための準備として教科書にあらわれてきましたが、上にみたように、連続量の世界に対応する離散的な世界と考えると微分・積分に相当する大きな対象が存在します。特に近年計算可能性の理論などの離散数学の研究が盛んとなっていますし、1989年の高校の指導要領で再び高1に場合の数・確率が復活しています。

しかし、いまだに場合の数と確率がセットで扱われるために、それぞれからつかむべき世界が判然としないまま、旧態依然としたとらえかたしかできない状態に陥りやすいように思えます。確率とは、場合の数の比というよりも次のような起こりやすさを数値化した下記のような比率尺度^{4]}としてとらえるべきでしょう。

1. 名義尺度：性別、職業、支持政党などのように単なる分類のカテゴリ。これらに数値がつけられていたとしても数値の大きさや大小関係は意味を持たない。例えばNDC（図書分類の日本十進分類法）などもこれにあたる。

[3] ねずみ算の話などいろいろな教材化ができますが、藤子不二雄,1979『ドラえもん第17巻』(小学館)の「パイパイ」など話のきっかけになりそうですね。

[4] 脇本和昌,田中 豊,1982『多変量統計解析法』(現代数学社)の「数量化の方法(1)」を参考にしています。

2. 順序尺度：例えば、成績の A, B, C, Dなどを数値化したもの。大小関係はあらかわせるが、4 と 3 の差が 2 と 1 の差に等しいとは言えない。
3. 間隔尺度：摂氏や華氏で測られた温度などは、数値の間隔が意味を持っている。しかし、20 度が 10 度の 2 倍の暑さであるとは言えない。このような尺度を間隔尺度という。
4. 比率尺度：間隔尺度の性質に加えて絶対原点が存在するもの。例えばものの長さや重さなど。

(問7) DIME プロジェクトの確率記録用紙^{5]}について調べて下さい。

【 問題 】

1. 計算練習

- (a) $a_{n+1} = 2a_n - 3$; $a_1 = 1$ $(-2^n + 3)$
- (b) $2a_{n+1} + a_n = 18$; $a_1 = 2$ $((\frac{1}{2})^n + 6)$
- (c) $a_{n+1} + a_n = 1$; $a_1 = 3$ $(\frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2})$
- (d) $a_{n+1} = a_n + 4$; $a_1 = 5$ $(4n + 1)$
- (e) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$; $a_1 = 2$; $a_2 = 3$ $(3 \cdot 2^{n-1} - 3^{n-1})$
- (f) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2$; $a_1 = 1$; $a_2 = 2$ $(1 + 2^{n-1} - 3^{n-1})$
- (g) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$; $a_1 = 0$; $a_2 = 1$ $(3^{n-1} - 2^{n-1})$
- (h) $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$; $a_1 = 1$; $a_2 = 2$ (2^{n-1})

2. 大相撲の巴戦が不公平ではないかと話題になることがあります^{6]}。次のそれぞれの方法で確率を計算してみてください。

- (a) 一巡しないうちにある力士が優勝する、その力士が対戦が一巡してから優勝する、その力士がもう一巡してから優勝する、… のそれぞれの確率を計算して、無限等比数列を計算する。

^[5] 野崎 (監), 1995 『数学の窓の開けかた』(東京書籍) p.131{134}

^[6] 例えば、中島らも, 1991 『中島らものますます明るい悩み相談室』(朝日新聞社) pp.58{60}

- (b) 全事象の確率を一辺が 1 の正方形であらわすとして、横の辺には一巡する前、一巡してから、もう一巡してから、… 優勝が決まる確率を示し、縦の辺では、そのタイミングのもとで誰が優勝するかの確率をあらわすことにする。
- (c) 直前の対戦で勝っているがまだ連勝していない力士が優勝する確率を x ; 負けた力士が優勝する確率を z ; 直前には休んでいた力士が優勝する確率を y とおいて、3 元連立方程式^[7]を解く。
3. 確率が漸化式に帰着される問題にはどのようなものがあるか調べてみて下さい。^[8]
4. A 組は男子 15 名、女子 20 名のクラスで、B 組は男子 20 名、女子 10 名のクラスでその学年には他にクラスがないとします。それぞれの担任の教師がジャンケンをしてどのクラスから代表を出すか決めてからそのクラスで代表を選んだところ代表は女子でした。代表が A 組の生徒である確率を求めてください。また、学年大会を開いて決めた代表が女子だったとすると確率はどうなりますか。
 $\frac{12}{19}, \frac{7}{13}$
5. 40 名の生徒がいるクラスに互いに誕生日が同じペアが少なくとも 1 組いる確率を表計算ソフトを用いて計算してみてください。
6. ポーカーの初めの配札で、既に役ができている確率をそれぞれの役について求めてみてください。電卓を用いて既約な有理数と小数とであらわしましょう。

[7] そのうちのひとつは $x + y + z = 1$

[8] 例えば rencontre の問題が知られています。

Chapter17

明治期における洋算の移入

17.1 留学

次のいくつかの章では、現在までに数学教育のあゆんだ軌跡を急ぎ足で眺めて、今後の歩むべき道について考える一助としたいと思います。

慶応二年、幕府は俊秀の少年十二人を選んで英国に留学させることになり、…留学生は大部分が二十歳未満で、最年長は三十五歳の中村正直であった。最年少は十二歳の箕作みつくり大六である。……一行中の人気者は箕作大六であった。この十二歳の少年は語学的に天才と見えて、英人乗客とも自由に会話していた。^[1]

とありますが、この箕作大六、後の名を菊池大麓^[2]。彼はケンブリッジ大学を優秀な成績で卒業し明治10年、22歳にして東京大学の教授となり、日本数学会の前身「東京数学会社」の創立者の一人となります^[3]。

藤沢利喜太郎は、明治16年から20年にかけて主にドイツへ数学研究のために留学しますが、この当時の東京大学で日本人の数学の教授は菊池のみでした^[4]が、星学の教授であった寺尾 寿は、フランスの影響の強い『中等教育算術教科書』を明治21(1888)年にあらわし理論算術を主張し、尾関正求『数学三千題』などにみら

[1] 高梨健吉,1985『文明開化の英語』pp.85-87

[2] 宇井純,生越忠,1975『大学解体論 2』(亜紀書房)に系図が入っているが、かなり興味深い。学者一家である。

[3] 野口 宏,1972『幾何の世界』(日本評論社)pp.3-5

[4] 松原元一,1983『日本数学教育史 II』(風間書房)p.261

れる多くの問題を解かせて中学校の入試の準備をする傾向に対しました。この『三千題』も小学校の教科書として文部省の検定に合格し使われていたところもあったようです。

17.2 お雇い外国人

菊池と藤沢は明治後半の算数・数学教育に対する影響力を持った人物ですが、では明治の初期にはどのようなことが起こったのでしょうか。明治政府の役人になったつもりで維新というクーデター直後の日本をどう設計するかという立場で追うとなんとなくわかる感じがします。江戸時代、日本には和算があり明治初期にも和算家が活躍していました。しかし、洋学の一部として洋算があります。程度はともあれ洋算は航海術とか軍事技術とかの応用が得られるようだという認識があったようです。また、「伝統を持たざる、~~AAAA~~論理的なる証明幾何学が、西洋の算術および代数に比して、輸入の後れたこともまた当然であった。事実われわれは明治四年までに証明幾何学に関する相当なる邦書の出版を見出し得なかつたのである」^[5]というのうなづけることでしょう。つまり、和算の文脈で洋算をみると、芸や技というよりも論理構成に主眼を置いている部分がみえにくく、日本では幕末から「和魂洋才」のように特に軍事技術への応用に目が向けられていたのです。

文部省は、和算家、高久 守静(1821-1883)に命じて和算による「数学書」を書かせて小学校用教科書として採用したのであるが、3ヵ月後の1872(明治5)年8月学制頒布に際し和算を全廃して洋算を専用することに定めてしまった。^[6]

文部省はこの年、アメリカ人スコットを東大の前身である大学南校から師範学校へ転じさせ、教育方法や算術、英語などを教えさせます。菊池などが留学している間の大学教育は、このスコットらのような「お雇い外国人」が担ってました、日本人のみで教授陣営を整えられるように学問を移入するという目標で外国人を教授として雇ったのです。あとで話題となる数学教育改良運動のペリーも東京大学工学部の

[5] 小倉金之助,1974『数学教育の歴史』(勁草書房:小倉金之助著作集6)p.222

[6] 黒田孝郎,中谷太郎,1960「わが国における数学教育の歴史」(『現代教育学9 数学と教育』岩波所収)p.19

前身である工部大学校で土木工学を 1875-1879 年の間教えていました^[7]。

しかし、明治 6 年 5 月には、「教則中、算術は洋算算術とあれども、和算をも課する意義にして」と文部省は発令し筆算珠算を併用させます。これは小学校の教員が甚だ少なかったのみならずひとりも筆算、つまり洋算を知っている人がいないという地方もあった。つまり、実施しようにも実施できない状況であったのです^[8]。

17.3 中学校の数学教科書

では、中学校の数学はどうだったのでしょうか。夏目漱石^[9]は、「吾々の時代に成っても、日本人の教師が英語で数学を教えた例がある。」と言いますし、正岡子規は、「予備門に入学してから最も困ったのは数学であった。数学の時間に教師は英語で説明した。……つまり数学と英語と二つの敵を一時に引き受けたため、学年試験に幾何で落第した。」^[10]

これらからもわかるように、初めは英語で書かれた教科書を輸入し、当時はコピーがありませんでしたから、それをもとに日本で活字を組んで刷り増しをして出版したものが教科書となっていたようです。一方洋算家は原書の翻訳を行って、訳す横から手の出るように「一冊出ると引張り合ひで謄写する」^[11]ような状況であったようです。根生誠さんがこの当時の算術の教科書の使用状況を克明に調査された結果によれば、「10 年代の前半はロビンソン等の原著が多く、後半からは神津、田中らによる翻訳書・部分訳および原著が多く見られ、また明治 20 年代には寺尾、上野らの理論算術書の散見される。さらに明治 30 年代は藤澤の教科書が主流になっている。藤澤によると、三千題流の教科書も相当用いられたようだが、本調査ではそれ程見られなかった。」^[12]

【 問題 】

[7] 丸山哲郎,1972「訳者解説」(ペリー, クライン『数学教育改革論』(明治図書))

[8] 遠藤利貞,1960『増修 日本数学史』初出、『数学と教育』(前出の『小倉金之助著作集 5』) p.185

[9] 『学生』(明治 44 年 1 月号) 前出の高梨 p.114 による。

[10] 子規全集第 8 巻(改造社)から、副島羊吉郎,1978『数学ざらいはなぜ生まれるか』(講談社) p.17 へ引用されたもの。

[11] 前出 小倉『数学教育の歴史』 p.227

[12] 根生 誠「明治期中等学校の数学教科書について(1) 算術編」『数学史研究』(通巻 152 号(1997))

1. 香港が1997年に中国へ返還されましたが、それ以前、イギリスの植民地であったため華人学校を除いて数学は香港の中学校では英語で教えられていました。1988年に偶然ヨーロッパの列車のコンパートメントで一緒になった香港の数学の先生から本文中で紹介した正岡子規のような経験を持つ中学生が多いと伺いました。訳すための基盤がないために英語などの外国語で数学の授業を行わざるを得ない国もあります。幕末から明治の時代に数学の術語として漢語をあてて日本語の数学書を作ろうとした功績は大きいと思えます。その反面、関数が英語では function（機能）であるなど英語の語感に較べてどうしても硬質となっている例がみられます。調べて見て下さい。

Chapter18

3つの国定教科書

18.1 黒表紙の時代

小学校の算術の教科書の国定化は明治36年に立法され、37年に実施されています。それは教科書会社の競争の過熱からくる大規模な贈収賄事件だったということは少し意外な感じがします^[1]。この国定教科書は、時期によって3種類あって、その表紙の色から、黒表紙、緑表紙、水色表紙と呼ばれています。

中学校のものは、国定ではなく依然検定制でしたが、小学校の国定教科書が改訂されるのに合わせて、いまの学習指導要領に当たる「中学校教授要目」が改訂されて、当然教科書もそれに応じた変化を見せています。そこで、小学校の国定教科書の通称を用いて時代をあらわすことにしましょう。

「中学校教授要目」は明治19(1886)年に制定され、1902年に改訂、1907年に義務教育が4年から6年になったことに伴う修正、さらに1911年に改訂されて1912年に実施されています。なお、1918年にあとに述べる改造運動の反映した修正、1924年には「改正度量衡法」に伴う修正がなされています。1886年のは、明治10年代後半の原書、翻訳書の時代ですが、1902年と1911年のものが、黒表紙の時代の教授要目と言えます。この「黒表紙」は菊池と藤澤が編集に当たっていますが、中学校の教科書や数学教育に関する講義や著作などにもこの2人の考えが多くの場面で反映されています。2人の影響の強い時期であると言えます。

「もともと、初等教育と中等教育は、西欧の伝統においては全く無関係であっ

[1] 松本清張『小説 東京帝国大学』(新潮文庫) p.344-345

た。……ところが、このような歴史的背景を持たないわが国においては、かなり安易に両者の理念を混同してしまった^[2]と戦後の批判がなされていますが、戦前の中学校への進学率は2割程度であったのですから、いまの大学への進学率よりも限られていると言えます。藤澤は理論算術に対抗する論の中で、数学者を育てる方法と一般の人のための普通教育で行われるべき方法との区別を指摘し「算術に理論なし」と主張しました^[3]。

菊池は分科主義をとり、

$(AB + CD)^2$ を代数式のごとく心得、これを代数的に展開して
 $AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD$ とし、もって定理の証明とするがごときは言語
同断^[4]

としました。また、1886年の要目で中学1年にあった「幾何初歩」は、アメリカ経由のヘルバルトやペスタロッチの「開発主義」影響の濃いもので「其論法の大いに異なるのみならず、その論ずる所の事物に付て、生徒の思想未だ明瞭成らず」という存在意義が主張されていたものですが、藤澤の「徹頭徹尾厳密なる論理法に抛らざるべからざるなり」という主張によって1902年の要目で、廃止されます。恐らく有効な実践が制定以来なされないままだったでしょう。1911年のものでは分科主義はかなり弱められましたが、学年配当の大筋には変更がなく、要目は詳しくされました^[5]。1902年のものと、1911年のものとを表の形で比較すると次のようになります。

18.2 形式陶冶の否定

ヨーロッパではリベラル・アーツの伝統がありますが、ユークリッド幾何の扱いはギリシャやラテンの古典語の学習と並んで重視されていました。言語や教養の基本である古典語、論理的思考の基本であるユークリッド幾何を学ばせれば、他の分野にも訓練が転移して効率がよいという形式陶冶の考えです。Thorndike などの「教

[2] 平林一栄, 1982 「一般陶冶としての数学教育」(日本数学教育学会第16回数学教育論文発表会)

[3] 藤澤, 1895 『算術条目及教授法』を、杉山吉茂, 1978 『数学科教師をめざす人のために』(一ツ橋書房)からの引用。

[4] 『幾何学講義』(1898)

[5] 前出の中谷, 黒田による

表 18.1: 黒表紙期要目の幾何分野の比較

	要旨	3年	4年	5年
1902	数学は数量の関係を明にし。計算に習熟せしめ兼ねて思考を精確ならしむるを以て要旨とす。	緒論 直線 円	円 面積 比例	比例 平面 多面体 曲面体
1911	数学は数量に関する知識を与え計算に習熟せしめ、応用を自在ならしめ、兼ねて思考を精確ならしむるを以て要旨とす。	直線 角 平行線 直線形 三角形 平行四辺形 円	比例 比例線 相似形	平面 平面と直線 二面角 立体角 多面体 (後略)

育測定運動」による実証的なデータがこれを否定することになります。彼の “ The Psychology of Algebra ” が出版されるのが 1928 年ですからちょうどこのころになります。

また、教えかたも暗記することに重点が置かれています。1830 年にアメリカの Yale 大学の数学の授業ではどのようなことが行われていたか^[6]を調べるとかなり衝撃的なことがわかります。

また、ヒルベルトの『幾何学の基礎』は、ユークリッドの体系も完全ではなかったことを示している訳で、特にアメリカの Moore などによる批判へ影響を及ぼしています。

このような時代のなかで、日本でも要目に沿いながらの先進的な実践や翻訳・紹介がなされていきます。林 鶴一,1905『新撰幾何学教科書』や、黒田 稔,1916『幾何学教科書』は、直感的・実験的方法、代数的方法を加味したもので、図形の求積が単なる計算の応用としてのみ行われた時代では画期的なものとされます^[7]。また、大正 4 年に文部省が出版した『新主義数学』はドイツの Behrendsen und Götting

[6] 潮木 守一,1986『キャンパスの生態誌』(中公新書)

[7] 前出の中谷,黒田

編による本を、森 外三郎に囑託して翻訳したものです。また「数学教育改造運動」を紹介している小倉金之助、1924『数学教育の根本問題』^[8]は大きな影響を与えました。「改造運動」の詳細については節を改めて紹介することにしましょう。

18.3 数学教育改造運動

数学教育改造運動、つまり数学教育の近代化の試みは19世紀末から20世紀初頭にかけて行われていますが、イギリスではPerry、アメリカではMoore、ドイツではKlineが代表的な人物とされています。

ペリーは前章にもあるように明治の日本で工部大学校の土木学の助教師も勤めたこともある工学者でした^[9]。当時は珍しいものであった方眼紙を積極的に使用し、方眼紙を安く作るということも仕事のうちとしたそうです。彼の本の翻訳^[10]が出版されています。現代の目には普通の教科書のように映りそうですが、当時のイギリスにとっては急進的な内容でした。彼は働きながら工学を学びましたが知らない記号、 $\frac{dy}{dx}$ の知識を得ようとしたのですが、彼の前には受験テクニックで彩られて実用からはかなり遠ざかった練習問題がちふさがっていたのです。そのような自分の体験を活かして、彼の講義や本には科学技術上の例が多くあげられ、初学者に概念の理解をよくさせるのはどうしたらよいかという工夫がなされています。「子供たちをして、実験・実証・実測・その他できる限りの方法で、論理を適用しようとする物事の観念に親しませること。その上に学習する題目について充分の興味をもたせることにある。」のです。

Mooreはアメリカ数学会の会長でした。純粋数学者としてペリーの提案に賛同して、代数・幾何・物理などの科目の間の高すぎる壁を崩すことを提案しました。「実験室法の主要なねらいは、すべての生徒に研究調査の真の精神を明らかにしてやり、科学的基本的方法を、理論的にも実際的にも明瞭に示してやることにある。」

Klineは『高い立場から見た初等数学』^[11]を著しています。そのアイデアは「メランの要目」に影響を与え、これに基づいて書かれた本が『新主義数学』の原著な

[8] 前出の小倉金之助著作集の第4巻として収められている

[9] 以下、小倉「現代数学教育史」(著作集6所収)に負う。

[10] 武田楠雄訳編、1959『技術者のための微積分』(森北出版)

[11] 東京図書から翻訳が出ている

のです。「数学の意義、内容、数学の教材、そういうものは絶えず時代の進歩に伴って行かなければならない。それにはいたずらに保守的に、旧式なものにとらわれてはいけない。」とその思想を小倉は紹介しています。

なお、平林一栄さんは前掲のなかで、「ペリーはその根底に民衆教育の理念をしかりふまえた工学者であったが、クラインは根っからの数学者であり、たとえ数学教育上で相通ずるものをもっていたかにみえても、両者の数学をみる眼には自ずから異なったものがあつたと言うべきであろう。」と指摘されていますが、注目すべき区別と思えます。

18.4 緑表紙の時代

このような世界的な改造運動の流れの日本への影響は、緑表紙が1935年（小学校1年）から1940年（小学校6年）にかけて出されるの及んで決定的となります。

当時文部省図書監修官であった塩野直道（1898-1969）は次のようにみている。一般教育会はどうであったかというに、高等師範、府県師範の附属小学校を中心に、その他特別な公立小学校、幾つかの勝れた私立学校の教員たちは、外国の数学教育の改革運動に刺激されて、相当進歩的な意見を持ち、或程度実践を試み、研究会、発表会を開き活発な動きを示したところもあった。……改訂を必要とする理由ときわめて大まかな改定の方針をまとめて上司に提出したところ、編纂主任の中村兎茂吉氏はこれは改訂ではなく新編纂の案だといひ、塩野に編纂の命が下つた。^[12]

このようにして、「尋常小学算術は、児童の数理思想を開発し日常生活を数理的に正しくするやうに指導することに主意を置いて編纂してある」^[13]国定教科書が生まれました。この時期に対応する中学校の教授要目は、この教科書に先立つ1931年に改正されたものです。その立案趣旨には、つぎのようなことが書かれています。「幾何は第1学年（幾何図形）に於て直観的に扱ひ立体図形に関する事項の如きまで至らしむるものとす。空間的觀察力の養成を必要と認めたるによる。斯くするも厳密

^[12]小倉金之助、黒田孝郎、1978『日本数学教育史』（明治図書）p.61

^[13]教師用書の凡例

なる理論を教うるにあらざるを以てこの程度において困難にあらず。かつまた多くの時間を要せざるなり、第2学年に於て比例、相似形に及ぶ。……第5学年に於ては立体幾何学の大体を論理的に授け、さらに三角法とその応用を授くることとせり。三角法は測量など種々の応用の広きが故に応用なる語を入れて注目を促せり」^[14]。しかし、中谷によれば、「羅列された図形にかんする用語を覚えるくらいが精一杯で、あい変わらず入学試験準備のため補助線のひき方に没頭するというのが幾何教育の実情」であったそうです。

なお1919年、現在の「日本数学教育学会」の前身である「日本中等教育数学会」が組織され、中学校で関数の変化を扱うこととか、そのグラフとかを教えるよう改良案を提案していました。しかし、小学校での改造運動の影響にくらべると中学校でのそれは「微温的」^[15]と評されるものであったようです。

18.5 水色表紙の時代

緑表紙『小学算術』が完成しないうちに、日華事変が始まり日本は戦争への泥沼を突進していきます。1940年、日本中等教育数学会の第22回総会で「数学教育の改正」が取り上げられますが、戦時中ということもあって、東部（東京文理科大学）、中部（大阪大学）、西部（広島高等師範）と集まって協議を継続することとなります。こうして刷新された中学校教授要目が公表されたのは、アメリカとの戦争、太平洋戦争の開戦のあとの昭和17年3月のことでした。要目は面白いものですが、当時の中学校は勤労働員などで恐らく勉強どころではなかったでしょう。

【 問題 】

1. 戦前の教授要目^[16]を明治のそれと対照してみてください。
2. 昔の教科書などがどのようなものであったかを調べるためには、東京書籍（株）

^[14] 小林善一、井上義夫、1957 『数学教授法』（共立：基礎数学講座12）p.10

^[15] 前出の小倉、黒田 p.42

^[16] 小倉金之助、黒田孝郎、1978 『日本数学教育史』（明治図書）pp.47-48, pp.72-75 に詳細な記述があります

表 18.2: 戦前の要目の比較

	要旨	1年	2年	3年	4年	5年
1931	数学は数量に関する知識を授け計算に習熟せしめ思考を精確ならしむるを以て要旨とす。	整数 小数 分数 正負の数 一次方程式 幾何図形	二次方程式 直線形, 円	分数方程式 比例, 相似 鋭角三角関数	(増課) 基本教材の 補充 級数, 対数	(増課) 平面及直線 多面体 曲面体 三角関数及其応用
1942	理数科数学は……之を国民生活に活用するの修練を為さしめ数理思想を涵養するものとす。	統計的処理 文字の使用 正負の数 一次方程式 測量測定 基本作図 対称と回転	整式分数式 平方根 二次方程式 平行と相似 直角三角形 円と球	多項式 不等式 対数 軌跡 円運動 三角関数	箇数の処理 級数 区分求積法 投影図 球面図形 図形の切断	函数の変化 統計図表 円錐曲線 力と運動

の「東書文庫」が便利です^[17]。また、国立教育研究所附属図書館^[18]もかなりの蔵書をもっていますし、諸外国の教科書に関しては、「教科書図書館」^[19]。本格的な研究にはこれらの場所を知っておくとよいと思います。

3. 例えば、スタンダールの『赤と黒』（講談社文庫など）のジュリアンが家庭教師としてデビューする場面には聖書の暗記が重要な役割を果たしています。このように文学作品から具体的な例を探してみてください。

[17] 東京都北区栄町 48-23 JR 京浜東北線王子駅あるいは都電栄町下車。平日の 9:30-16:30。

[18] 目黒区下目黒 6-5-22 JR 山手線の目黒駅からバスで目黒消防署下車。これも平日の 9:30-16:30。

[19] 新宿区本塩町 20-2 市谷駅から雪印の北隣が大体の目標です。

$ax^2 + 2hxy + by^2 = c$ の整数解 $(x; y)$ を求めるとき、この方程式があらわすグラフは二次曲線ですから、楕円ならその領域は有限ですから解はあっても有限個です。

双曲線となるものについては、 $x^2 - Dy^2 = 1$ (D は平方数ではない) の形のは Pell 方程式と呼ばれています。この最小正根 $(x_1; y_1)$ をみいだすことができれば、

$$x_n + y_n \sqrt{D} = (x_1 + y_1 \sqrt{D})^n$$

も解なのです。

一次変換、 $(x_k; y_k) \rightarrow (x_{k+1}; y_{k+1})$ の固有値、固有ベクトルと、方程式があらわす双曲線の漸近線とを調べてみてください。

Chapter19

戦後の学習指導要領

19.1 試案の2文字

昭和 20 年の 8 月 15 日に日本の敗戦によって太平洋戦争が終わるわけですが、6-3-3-4 という新制の修業年限をもつ小学校から大学までの校種となり^[1]、義務教育は中学までになりましたが、戦後の高度経済成長のなかで高校への就学率は増大し 95 %を越えるようになってきています。

小学校と中学校と高校とは学習指導要領が定められてそれに沿った検定済教科書を学校は使っています。しかし、昭和 20 年代と 30 年代以降では学習指導要領の持つ性格が微妙に違っています。前者には「学習指導要領（試案）」であったのが、「学習指導要領」となり、後者には「法的拘束力」があると主張されています^[2]。

高校は高率の進学率にも拘らず入学試験があるので、そのいわゆる「偏差値」によって生徒は輪切りをされて、学校間の格差は公然とではないまでも存在しています。また、大学への進学希望者を多く抱える高校では、指導要領・教科書による教材範囲の規定の他に、大学入試の出題範囲にも多かれ少なかれ左右されるようになってきています。

しかし、当時の教育思潮を指導要領はある程度反映し、かなりの拘束力を持って授業を規定してきたことも事実で、指導要領の変遷をみることは、戦後の数学教育

[1] 1947 年の教育基本法

[2] 昭和 30 年代のもの以降には指導要領の解説である『小学校 算数指導書』『中学校 数学指導書』『高等学校 学習指導要領解説 数学編』などが発行されているので、官報などを置いている大きな書店で最新のものを手にすることができます。

をみる上で重要な作業であると位置付けることができるでしょう。

19.2 生活単元学習

昭和 20 年代の学習指導要領は、復刻合本されたものが出ています^[3]が、日米講和条約が結ばれるのが 1951 年で、敗戦からそれまでは日本はアメリカの占領下にありました。占領軍の文部行政のスタッフには「進歩主義」の教育学者が多く含まれていました。「教育方法」などの講義で聞かれるように、J.Dewey などを中心とする社会のシミュレーションとして学校をとらえ、学校での活動がどうあるべきか考えるグループです。こうして「生活単元学習」が、昭和 20 年代の特徴となったのです。

数学を学ぶのに、社会で数学が使われる場面から入ります。そのような動機付けや応用可能性への着目にはみるべきものがあるのですが、これも現場でこの思想がどのように理解消化され実践されたかという問題があります。そして、すべての内容を社会で使われる文脈に配置することが可能である保証はありませんし、社会で使われる場面による教材の配列が、数学を学ぶ上で効率のよい配列であるとは限らないのです。国立教育研究所の久保舜一は、「学力は一年以上の低下を示している」との調査結果を発表^[4]しました。

19.3 系統学習

昭和 33 年の指導要領^[5]の文部大臣名による前書き^[6]に、「基礎学力の充実と科学技術教育の向上を基本方針の一つとした。これらのことに深いつながりをもつ数学の使命は、まことに大きいと言わなければならない。…… いっそう系統性をもたせ、基本的な事柄を徹底して学習ができるように努めた ……」とあります。これまでの「生活単元学習」に対して「系統学習」とこの指導要領の特徴は呼ばれています。緑表紙の時期への復帰が期待されたのでした。

一方、民間では、1951 年数学教育協議会が発足し、生活単元学習などの「新教育」を遠山 啓などが批判していきます。1962 年の毎日新聞の連載『算数に強くなる』

[3] 国立教育研究所内戦後教育改革資料研究会（編）『文部省 学習指導要領』（日本図書センター）

[4] 久保 1952 『算数学力 学力低下とその実験』（東京大学出版会）

[5] 昭和 37(1962) 年から実施される。

[6] 実際の執筆は当時の文部省事務官であった中島健三であった。

で一躍「水道方式」が有名になっていきます。

この文部省の指導要領も水道方式も、「新教育」への批判であって、共通する部分があるように思います。しかし、不思議なことに、公職追放により野に下った塩野直道が1962年『水道方式を批判する』（啓林館）伊藤武が日本数学教育会^[7]会誌の『算数教育』^[8]で、「水道方式批判」を書くと言ったように仲がよいとは言えない関係が長い間続くことになります。

そのひとつとして、政治的な理由。つまり朝鮮戦争の勃発による占領軍の姿勢の微妙な変化。民間教育団体が多くは労働組合の教育研究活動と密接な関係を持ち、文部省と関係を持つ日本数学教育会との間に、革新・保守の対立の図式が生まれたこと。それが1958年の日教組勤務評定阻止全国統一行動などによって対立が決定的になり、政党の自民・社会の対立をそのまま戦後引き摺っていったという見方があります。さらに、新聞への連載でマスコミをバックにした民間教育団体の勢力に文部省がおそれを抱いたという説も成り立ちえましよう。しかしそう言い切ってしまうことによって、理論的な対立を見過ごしてはならないと思います^[9]。

19.4 現代化とその後

1957年、ソビエトはスプートニク1号を地球の人工衛星とすることを人類史上初めて成功します。戦後の2つの大国、アメリカとソビエトはそれぞれ資本主義陣営、共産主義陣営を代表する立場をとって特に軍事力で対立していましたから、これはアメリカにとってかなりショックなニュースでした。これで、ソビエトが世界のどこにでもミサイルを打ち込める技術をもっていることが示されたのです。アメリカは科学技術でソビエトに優位に立っていると思っていましたから、全面的な建て直しを試みました。教育の面では、Brunerの『教育の過程』が有名です。「どの年齢のだれに対しても、どんなものでもそのままのなんらかの形で教えることが可能である」^[10]

アメリカはこれをきっかけに、軍事予算に準じるという優先度をつけて潤沢な予算

[7] 日本数学教育学会はこの名から改名している。

[8] Vol.44 No.8(1962)

[9] 割合に関する考えや暗算の扱いなど、小学校の算数に関することが多いのでここでは深入りしません。

[10] J.S. Bruner, 1961/鈴木・佐藤, 1963 『教育の過程』(岩波)

を教育の開発につけます。そうして生まれたのが School Mathematics Study Group で、その名の先鋭的な一連の教科書を作りました。このグループには数学者も動員され、現代数学の立場から教材開発の提案をしています。その結果、集合などの New Math を早期から扱うという特色を持つようになります。この影響を受けたのが 1969 年に告示される中学校学習指導要領です^[11]。

次の引用^[12]は、日数教（日本数学教育学会）と数教協（数学教育協議会）の違いを当時の数教協からの視点として注目すべき記述です。「日数教では、数学教育を現代化しなければならなくなった要因を、アメリカなどの動向を研究し、現代数学の著しい発達と科学技術の躍進にあると規定している。そしてつぎのような見解をとっている。現代数学の公理主義と抽象性が数学そのものの発展を促進し、現代技術躍進の原動力となった。数学の応用も広範囲になった。この新しい時代に即応できるような内容と方法をもった数学教育に改革しなければならないと考えている。一方、数教協はペリー・クラインの改造運動を近代化と位置付けて、教育の現場からでてくる矛盾や要求、積極的な授業研究の成果を検討して、それらを解決するための新しい方法と内容を小学校から積み上げていく必要を指摘し、現代数学とマクロな発達としての数学史、そして児童心理学を 3 つの柱に据えた。」

数教協の大会の基調は次のように変わってきています^[13]。

1950 年代：生活単元学習批判

1960 年代：[前半]量・水道方式などの研究

1960 年代：[後半]一貫カリキュラム

1970 年代：楽しい授業

1980 年代：人間のための数学

1990 年代：数学でみる世界の姿

この初めの 3 つは松田の指摘と見事に一致しています。

1970 年に中学校の学習指導要領が改訂されます^[14]。「望ましい数学的な考え方をいっそう強調するために、新しく次のような総括的な目標が付け加えられた。『事象を数理的にとらえ、論理的に考え、統合的、発展的に考察し、処理する能力と態度

[11] 高等学校のものは 1970 年。

[12] 松田信行, 1981 『戦後日本の数学教育改革』(明治図書) pp.23-25, 114-115 を一部改変。

[13] 数学教育協議会の記念誌 『不惑の迷い 数学教育協議会 40 年の歩み』(1992) p.40

[14] 高校は 1972 年。

を育成する。』」^[15]1970年代の指導要領は New Math を多く盛り込んだものでしたが、この内容について多くのマスコミからの批判がありました。また、1970年ころは日本全国で日米安保条約の継続の是非、大学のありかたへの疑問などをきっかけに大学紛争が行われた時期でした。その鎮静化のあとには、学生・生徒の無気力・無感動が1970年代に指摘されました。そのなかで高校では「授業が成り立たない」という現象が起こりました。一言で片付けるのは気が引けますが New Math の影響で高度になった教科内容のなかで、テスト学力で輪切りにされた高校で、高校生は無力感を覚え、そのフラストレーションが、授業妨害や不参加の形となってあらわれたのです。このような状況のなかで、授業のなかにわかること、楽しいことという救いを求め見出す教師がいて授業実践や研究が行われたのが数教協の70年代と言えます。

1977年に中学校の学習指導要領が改訂^[16]されますが、これのもとになった1976年の教育課程審議会答申には、

内容を精選してゆとりのあるしかも充実した学校生活

高等学校の大部分の青少年を教育する国民教育機関としての性格

などの言葉がみられるが、「ゆとり」のスローガンのもとに1969年/1970年の指導要領での新教材が再検討されて、高校での必修の内容が大幅に削減されました。数学の教科のなかに、数学Ⅰ、基礎解析、代数・幾何……などの科目が設けられましたが、そのうち必修であるのは数学Ⅰの4単位のみとなりました。これは、実質上の義務教育となった高校の進学率の高さを利用して、高1までを義務教育とみなし、あとは「個性に応じて」の選択に任せるとされました。

1989年に中学校・高等学校ともに学習指導要領が改訂されますが、高校では1次変換の削減など教材内容の軽減化がさらに進み、その代りに情報化のスローガンのもとにコンピュータなどの利用がより積極的に行われるようになります。場合の数が数学Ⅰに、複素数平面が数学Ⅱに入っているのは、1970年代に実施されていたものの復古という印象があります。平面幾何も数学Ⅱに入っていますが、これにはノーベル化学賞授賞者の福井謙一氏の鶴のひと声によるものと話題にもなりました。科目の編成は、数学Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,A,B,C となってアルファベットの科目は、「4単位程度

[15] 文部省,1970『中学校指導書 数学編』(大阪書籍)

[16] 高等学校は1979年。

をようするが、標準単位は2単位であり、……(内容を)適宜選択させる」と4つのうちから2つをつまみ食いする。つまり、教科書1冊全部は教えないというこれまでの教科書の使い方とは全く違うスタイルが特徴となっています。

19.5 国際数学教育調査

国際数学教育調査は、1964年に第1回、1980-82年に第2回、1994-95年に第3回の調査が行われています。これは、計算・理解・応用・分析などの認知的領域の他、情意的領域^[17]に関する調査も含まれています。その結果として^[18]算数が好きな小学校3・4年生は7-8割いるが、中学校にかけて減少し、中学校1・2年では5割になってしまう。同様に数学が楽しい生徒も中学校にかけて減少する。などが報告されています。

1989年改訂の日本の学習指導要領では、「課題学習」が登場しています。これは次に紹介する1987年12月の教育課程審議会からの答申を踏まえています。

(2) 自ら学ぶ意欲と社会の変化に主体的に対応できる能力の育成を重視すること。

(3) 国民として必要とされる基礎的・基本的な内容を重視し、個性を生かす教育の充実を図ること。

この課題学習に関して様々な提案がなされていますが、「果たして課題学習として1つに括れるものかという疑問」さえ感じます^[19]。

また、認知的領域では、計算は強いが応用が弱いという傾向が指摘されています。アメリカなどでは、逆に計算力が低いようです。「中1集団では…『計算』『応用』の成績がよく、『理解』『分析』の2領域ではやや劣っている。…高3集団では…『計算』の正当率が高く、『理解』『分析』は低い」^[20]日本ではこれまでみてきたように学習指導要領で基準が設けられていたのですが、国家が基準を設けていなかったイギリスでは National Curriculum, アメリカでは Standard と指導要領のようなものを作ることがおこりました。しかし、これらは日本の指導要領に学んではいるし似てはいても指導要領とは別ものです^[21]。このような動向をも踏まえて

[17] 例えば、B.S.Bloom,1976/梶田・松田訳,1980『個人特性と学校学習』(第一法規)

[18] 国立教育研究所,1996『小・中学生の算数・数学,理科の成績』(東洋館)など

[19] 正田「中学校数学における評価としての課題学習」(『教育方法研究』Vol.20(1994))

[20] 国立教育研究所,1981『中学・高校生の数学の成績』(第一法規) pp.3-4

[21] 浦野東洋一「日本の教育と英国のナショナル・カリキュラム」永井憲一編,1991『新学習指導要領と

これからの推移が注目されるところです。

19.6 個性とは何か

トフラーの言うように、1万年前の農耕、300年前の産業革命に続く50年前からの高度情報社会化をもたらす第3の波は、教育に規格にあった工業製品のような到達水準^[22]を要求しなくなるかもしれません。そのかわり、「頻繁な作業変更はもちろぬ、目が回るような配転の連続、製品の変更、組織替えに耐え」る柔軟性をもち、「責任感が強く、自分の仕事と他の作業者との仕事の関連を理解し、広範な仕事をこなし、……周囲の人間ときめ細かに調和できる」^[23]ことが要求されるでしょう。従って、次のようなことが指摘されます。「第3の波の会社は、機械的に反応する者ではなく、判断力や豊かな能力のある労働者を必要とする。……いまなお反復的な仕事に向く第2の波の労働者を生産しようと力を入れている学校は、現在の教育方法を次第に転換する必要がある。」^[24]ここでは労働の側面のみを紹介しましたが、実は無給の仕事から成り立つAセクターと市場を通じて交換されるBセクタ^[25]との2つの経済部門を考えることによって、トフラーは未来社会を予見しようとしています。

ある本^[26]の「はしがき」に次のようなことが書いてあります。「20世紀後半の世界に活動する日本人に必要な数学として、私は一応「微分方程式まで」という線を引いてみた。」実はこの水準は著者自ら「それはすばらしいことであろうと思う」と言うように必ずしもすべての生徒に実現可能とは思えない理想論ですが、確かにこのように線を引いてみると、中学以来の「文字」の威力も「分析と総合」の手法も、虚数によって無関係にみえていた指数関数と三角関数の統合も眺めることができ、これからの道のりはあるものの、山の頂上にたったみとおしが得られます。ここで、一番初めの章にかいた「日常生活の質」を思いだしていただきたいのですが、このような余暇の側面でも必要となる柔軟で広範な資質を、あるいはその資質を必

教師』（エイデル研究所）

[22] A. Toè er, 1980/徳岡孝夫 訳, 1982 『第三の波』（中公文庫）p.50-51

[23] 同書 p.503

[24] 同書 p.461

[25] 同書 p.354

[26] 遠山 啓, 1959 『数学入門（上）』（岩波新書）

要に応じて得る可能性をどのように学校が保証できるでしょうか。教育課程、特に必修の科目をみるうえで、これがどのような世界を与えうるかを考えてみましょう。高校数学の唯一の必修は数学Ⅰですが、二次関数・図形と計量・個数の処理・確率となると、敢えて一言で言おうとすれば、修業年限が1年長くなった昭和33年の指導要領。教育課程があらわそうとしている数学文化はどう読めるのでしょうか。

1977/1979,1989と2つの指導要領では、「個性に応じて」ということがキーワードとなっています。この個性という言葉は魅力的に響きますが、安易に使うと危険な言葉でもあります。藤田は“尊厳としての個性”と“可能態としての個性”とを概念的に区別する必要性を指摘して^[27]、日本の学校の基本的特徴としての「個人」とは区別される「間人主義的個性観」^[28]をもとに習熟度別学級編成の是非を考察しています。

エリクソンは自我同一性の形成と確立を青年期の課題としました^[29]。中等教育での「自分探し」^[30]にとって、私も執筆者として企画に参加した本^[31]の目次構成は、自画自賛で恐縮ですがなかなかいい線いってると思います。数学の題材を使って自分の表現をしようとし、自分の活動によって数学的な構造を解明しようとし、さらに現実世界に関わりを持つ数学をみて、数学の構造を自己のなかで味わうといった、数学という教材の自己のなかへの取り込みが意識されているのです。このような、発達や社会化の側面と教材のもつ順序性が学校での活動のなかでうまく噛みあうようなプランが教育課程に望まれます。

【 問題 】

1. 中島健三,1979「わが国における算数・数学教育の歴史と現状」p.145 (赤撰也編『算数・数学教育の理論と構造』(教育学講座:学習研究社))の表5にある内容について昭和22,23,26,33のそれぞれの指導要領での配当学年の変化を調べてみましょう。

[27] 藤田英典,1997『教育改革』(岩波新書)p.48

[28] 同書 pp.150-151

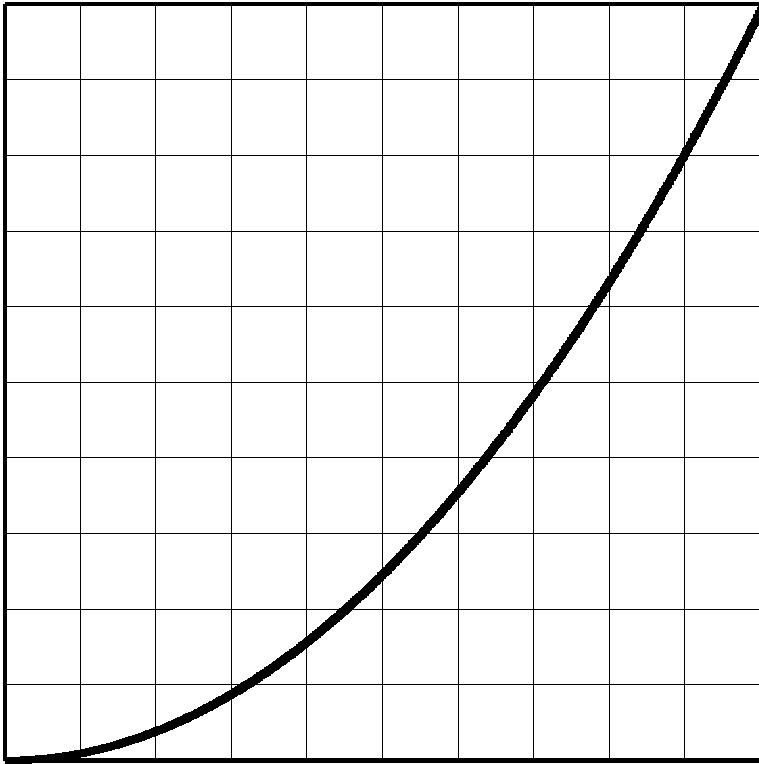
[29] E.H. エリクソン,1967/岩瀬庸理訳,1973『アイデンティティ 青年と危機』(金沢文庫)

[30] 例えば、竹内常一他編,1995『講座 高校教育改革』(労働旬報社)

[31] 野崎昭弘,1995『数学の窓の開けかた』(東京書籍)

2. 戦後の指導要領で中1の幾何にはどのようなものが含まれているかその変化を調べてください。

109ページ参照



この $\text{T}_\text{E}\text{X}$ ソースは49ページにあります。

Chapter20

あとがきにかえて

20.1 本を書くこと

ソクラテスは本は思考を破壊すると言ったそうです。「ソクラテスは弟子と交わした問答形式の対話で有名である。そこでは、互いが相手の考えについて疑問をもったり吟味したりする。……聞き手は、その背後にある仮定を探り出すため、話をさえぎって質問してもよいことになっている。しかし本の場合では、著者が本と一緒に回るとは回らない。本に返答させるなど不可能なのだから、質問ができるはずもない。」^[1]

これは、授業という対話にも言えることです。プリントを時間の初めに配ると、生徒はそのプリントが示している授業のルールに乗っていないとならないのかなという気になってしまいます。そうすると、話を聞いているうちに出てきた疑問や思いつきが授業に出しにくくなりますし、教えるの方も生徒からの思わぬ返答に引いたルールが邪魔になる場合があります。そんなことを避けるために、なるべく細かな説明を抜きにして授業の素材だけのプリントにしてみたり^[2]、B4版ではなくB5版にして話題の範囲を狭くして、この後の展開が予想と違ってしまった場合、あとのプリントを配らずに敢えて捨てることができるようにしたりの工夫をしています。

これもまたノーマンですが、「もしあなたが私と1時間おしゃべりをしたいと思ったら、必要なのは1時間という時間だけである。……もしあなたが私の文章を1時

^[1] D.A.Norman,1993/佐伯 胖 監訳,1993『人を賢くする道具 ソフト・テクノロジーの心理学』(新曜社) p.57

^[2] これは、プリントの印象を強くするという効果もあるようです。

間ほど読みたいと思ったら、私はずっと一所懸命働かなければならない。……これは印刷された場合の13ページから40ページにあたる。これを書くのに私は10時間を要する。これくらいの原稿となると、書くのに1ヵ月は軽くかかることもあるし、題材が複雑だったらもっとかかるだろう。」^[3]もちろん、これを書いた経験から大いにうなづけます。やっぱり、それなりに難行でした。

それにもかかわらず書こうと思ったのは、1時間の話を準備のためであったと言えるでしょう。この本のはじめの章に書いたように、東京電機大学での「数学科教育法」のテキストを作るということにありました。ソクラテスは、何も持たずに街へ出て問答をしましたが、私の方は準備にいろいろな本を積み上げて、これとあれを持っていこうなんて思案を講義の始まる30分前からソワソワとしています。1時間、正確には90分ですが、の話には、いろいろな資料や適切な例を盛り込みたいと思います。しかし、その例がうまく思い出せなかったり、資料がスムーズに探せなかったりする危険があります。もしあなたが、研究室に一人で訪ねてきてくれた気を長くして待っていてくれる人ならばよいのですが、90分という限られた時間のなかで、良い例をポンとだすには、そのようなもたつきは禁物なのです。

いまなら、ハイパーテキストとかで、検索に便利な方法も開発されているのですがそこまで凝る余裕はありませんでした。むしろ、電車のなかで他の道具なしで手軽にパラパラと読める気軽さの方が好ましく思えました。それが、本を書こうとする動機の第1です。

20.2 話すこと

昨今の大学では授業の講義要目(シラバス)を発行しています。そこに私は次のような「目的概要」を書きました。

数学科教育法の名を冠して語るべきこととしては、数学教育に関する諸思潮・諸理論の紹介、数学教育に関連する歴史・心理学・教育方法学など、学習指導要領の解説、教材研究などを挙げるができる。それらに比べてこの3単位に相当する時間はあまりに短い。

^[3]ノーマン,1992/佐伯監訳,1993『テクノロジー・ウォッチング』(新曜社) pp.16-17

そこで、これらのうちで教材研究、即ち受講者にとって既習の内容を少し高い立場に立ち、教えることを意識しながら眺めてみることを中心に据えて、他の要素をその中に織り込む。数学の教え手としての受講者の腕が磨かれる時間でありたい。^[4]

この本を書くに当たって将来の数学の教え手ではなくとも楽しんでいただけるように念じたつもりですが、その成果の方にはちょっと自信がありません。

大体、この本の1章分が1回の講義に相当しています。ノーマンのよむスピードに比べてかなり遅いようです。もちろん、読むことと講義とは違います。昔の講義は、テキストを読み上げてそれを学生が筆記するってものだったらしいですが、まさかそんなことはしません。ちゃんとした印刷物が作れますから筆記する必要はなく、学生さんが聞くこと考えることに専念できるということもこのようなテキストの長所でしょう。

私の頭の中にあることを話を介して聞き手のなかに芽生えさせる。頭の内容を複写することができないのは、むしろ幸福というべきでしょう。聞き手なりのものが芽生えて欲しいのです。話を仲介にするというところに一種の不効率を感じるのですが、読むスピードに比べての遅さかもしれません。肉を食べてアミノ酸に消化して、体内の血液循環によって運搬して筋肉を作ると同じように、教授マップ^[5]を眺めているだけでなく、それに関する話がなければ意味がわからない、一度話すことを経ないと内容が伝わらないって気がします。でも、受け手の側も送り手の側もその情報は結局教授マップなのです。

さすがに、教授マップそのものでは、記録にはよくても読みにくくなりますが、これを元に演習に書いてある資料をプリントにして一緒に考えたり、問題を解いたり、書いてあることから脱線してみたり、具体例を付け加えたり、質問を受けたり、討論をしたりが講義の中には予定されるでしょう。

^[4] 1997年度のもの。

^[5] 東洋他,1977『教育のプログラム』(共立:情報科学講座E・17・2)pp.54-61 実例としては、平田啓一,1977『授業設計の演習』(平凡社)pp.17-28が面白い。

20.3 授業の柔軟性とテキスト

じゃあ、いっそのこと実況中継や速記録のように、話すことをそのまま本にすればいいじゃないかという考えも出てくるでしょう。しかし、これは冗長であるという他に、授業のルールが固定化される危険をはらんでいます。だいたい、「毎年同じ内容を繰り返す、つまり、1回講義ノートを作ったら、一生それで間に合やす」とか、「毎年黄色くなったノートにもとづき、一字一句違えることのないような細心の注意を払って」とか^[6]、「いつも教科書どおりの授業をする」というのはよく使われる悪口です。

私は、講義要目の最後に、「以上のテーマは標準的な予定であって参加者の反応や受講者などによって適宜変更する。」と書きました。毎年受講者も変りますし、私も年齢を1歳ずつとっていくという点でもかわるでしょう。

1970年代の後半に林田遼右先生がNHKの『テレビフランス語講座』の講師をされていたことがあります。そのテキストに、「テキストだけでもそれなりにわかる。もちろん番組だけでもよくわかる。番組とテキストがあればもっとよくわかる」と執筆方針が述べられていましたが、なかなかいいモットーだと思いますし、見習いたいと思います。テレビの番組はいろいろなスタッフの人がいて、時間の制約も厳しく勝手に話を脱線することは許されないこともあるでしょうが、標準的な話すべきことをテキストでおさえおいて、それをどうふくらませるかということを経験の学生さんを前に工夫することを楽しみたいものです。

20.4 大学の講義

昔の学生さんは講義にでないことを誇りとしていたようです。特に数学科の学生さんは、図書館で本を調べて自分で勉強する。あるいは、「そのところはもう知っているから講義にでない。だいたい、最初の何回か出ていると講義の様子とペース、そしていつごろにどこまでいきそうか察しがつくからネ。」多くの場合は、その科目の内容を良く知っていると言いたくていきがっているだけか、実は単にサボりたいだけだったりしますが……。

いまの学生さんは出席率がよるしいようです。これは出席をとっていることもあ

[6] 鷲田小彌太, 1991 『大学教授になる方法』(青弓社) pp.27-28

りますが、授業をしてみせるということも内容ですから図書館でいくら勉強しても仕方のない分野であるからかもしれません。「講義だけでももちろんわかる。テキストだけでもそれなりにわかる。両方あればもっとよくわかる。」といきたいところですが、テキストなしにはちょっときついです。いろいろな理由で欠席をせざるを得ない人のために、「テキストだけでもそれなりにわかる」は実現したいと思いますし、一般の読者の方のために、「テキストだけでもそれなりに楽しめる」ことを努力したつもりです。

なるべく、コンパクトにする工夫もしました。文献を書名と該当のページを脚注に示す程度にしたり、「演習問題」に内容を押し込むこともしました。電車のなかでパラパラとめくると、大学でのおつきあいとはこのところが違ってくるでしょう。

大学のありかたを考えると、大学の教員は講義の内容を本を書くことによって世間に公表するべきだと思います。昨今のシラバス公表の流れはそれに合致するものだと思います。本を読んでこのような話をもっと詳しく聞きたいと大学を目指す^[7]のが本来の姿で、どの大学にはどのような教員がいてどのような話をするということが明らかにされるべきです。また、18-22歳という限られた年代のためだけに学問があるわけではなく、大学の教員はその研究の成果を一般の社会人へ読みやすく提供する義務があるでしょう。

このような考えで、これまでの高校・中学の教師としての経験をもとに、この本を書きました。本をかくということは、著者のびんづめを作るようなもので、大学の教員としての1年目が固定して保存されることを意味します。日本の出版事情は、よくはないのでそう簡単に改版することはできないでしょうから、不完全なものを固定するのではと少しきがりではありますが、でも、その反面1年目だからびんづめにしておきたいとも思います。これからもいろいろと不完全なところを補っていききたいと思いますから、読者の皆様のご叱正を賜りたいと思います。幸い、東京電機大学ではインターネットの環境が充実しておりますので、この印刷後の修正などをホームページ

<http://www.dendai.ac.jp>, <http://cckweb.cck.dendai.ac.jp/~ri/>

を利用して対応していきたいと思っております。

^[7] 残念ながら、この本の内容は教職課程というオプションの科目ですから、このために電機大学を目指す受験生はかなり奇特な人と言うべきですが。

最後になりましたが、学生さんが講義に期待してくれていることがこの準備への大いに励みになりました。また、赴任して1年目のほとんどをこれに費やして、帰宅が極端に遅くなってしまい淋しい思いをさせた家族のことを記して謝意をあらわしたいと思います。

演習問題へのヒント

1. 幾何の問題を座標系を定めて代数の方程式を立ててそれを解き、その解を解釈して元の幾何の問題の解を得ようとするのが解析幾何と言えます。
2. 最適なモデルは何であるかを探索することも含めて数学的な活動としています。

```

3. \documentstyle[a5j]{jarticle}
\begin{document}
\newpage
\unitlength=0.1mm
\begin{picture}(1300,1700)
\multiput(50,0)(0,100){17}
{\multiput(50,0)(100,0){12}{\circle*{3}} }
\end{picture}
\end{document}

```

1. x もしくは y の係数が等しい 一方の係数が他方の倍数 自明でない公倍数を考慮する必要がある などの系列が考えられるでしょう。

1. 対応関係を持つ事象を Number Machine で表すまでにはかなりの数学的抽象が行われるので形態的共通性があるとは言い難いのですが、機械は自動販売機などを模したものとはいえるでしょう。合成や逆をあらわすには、旗の図の方が有利です。

2. 榊プランでは、よりきれいに次のような特徴が見えます。

抽象度	具体物	準具体物	半具体物	数学の対象
榊プラン	キャラメル箱	絵を書いたカード	x と書いたカード	文字 x
形態の類似			x	x
統辞体系	x			

3. 中核の部分のみ記します。

```

\unitlength=0.1mm
\begin{picture}(1300,1500)
\multiput(0,0)(0,173.20508){8}
{\multiput(0,0)(100,0){12}{\circle*{3}} }
\multiput(0,0)(0,173.20508){8}
{\multiput(50,86.60254)(100,0){12}{\circle*{3}} }

```

4. ここの枚数は等間隔でもなければ、大きさの順に示されている訳でもありません。グラフにかけば、量と量の関係が見やすくなります。

5. 正田 『DIME 授業書による …』 pp.45-47

1. 【課題1】については省略します。【課題2】については、前掲の『DIME 授業書による楽しい数学』p.100 を参考にしてください。

2. 正方形の面を真正面からみる投影図と、真裏からみるもの。

3. 模型・等測図・投影図・等高線の図（空間での平面などをあらわす方程式）と並べてみてください。

4. 実は、DIME がイギリスで三次元幾何を中学校で教えるようになったきっかけと言えます。よい教具・授業が教育課程をかえたのです。日本では投影図を中学で教えたこともありますが、よく教えられないので技術・家庭に残るのみとなっています。

1. 「因数分解」と「2次方程式」、「極限」と「微分」。

2. 次の章に紹介する「ベキタイル」によるものも多くなってきています。展開の逆操作ですから展開の最後に穴埋めとして素地指導をすることもできるでしょう。

3. 2次3項式の「タスキがけ」を最初に教えて印象が強い場合、この特殊な場合として、 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 \pm 2ab + b^2 = \dots$ などをもみることもできます。

1. 二次方程式の前の因数分解、微分の前の極限。他にもあるかもしれません。

2. 41ページのような導入も東京書籍などに見られます。

1. 二次方程式では平方完成で一次の項を消しましたが、同じように三次方程式では二次の項、四次方程式では三次の項をまず消します。

2. 和を考える2つベクトルのそれぞれの正射影の和が和の正射影になるところ。

3. 30

4. 恒等写像を含め6つの写像があるはずです。[以下は略します。]

1. $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n + 2}$ なので、 $\frac{2}{1} \frac{5}{2}$

2. Cayley-Hamilton の利用。 $'(x) = x^2 - 4x - 1$ とおき、 $x^n = '(x)Q(x) + (kx + l)$ を満たす k, l を $'(x) = 0$ の2つの解を代入した方程式を連立させて解く。

3. $u_{n+1} = f(u_n)$; $u_{n-1} = g(u_0)$ とすると、 $u_n = f(g(u_0))$ 。

4. $\frac{1}{2} \frac{2}{5} \frac{p-1}{2} \frac{p-1}{5} \frac{p-1}{2} \frac{p-1}{5} \frac{p-1}{2} \frac{p-1}{5} \frac{p-1}{2} \frac{p-1}{5}$

5. 関数の合成と行列の掛け算をそれぞれ行ってみて下さい。

6. $\frac{(2 + \frac{p-1}{5})^{n+1} + (2 - \frac{p-1}{5})^{n+1}}{(2 + \frac{p-1}{5})^{n+1} - (2 - \frac{p-1}{5})^{n+1}} \frac{p-1}{5}$

1. $(11^\circ; 5^\circ)$; 27km, (5回, 3回)
1. 交わるときには、その交点を中心として2直線のなす角の2倍の回転。平行なときには、直線に垂直な方向に直線間の距離の2倍の平行移動。
2. \vec{v} を点 P のまわりに左まわりに $\frac{\pi}{2}$ の回転をしたもの。
3. AD の垂直二等分線に関して対称移動してから、B, E を一致させると合同なので他の頂点も …。
4. (略)
5. (略)
1. ABCD \leftrightarrow CDAB; ABCD \leftrightarrow DCBA, ABCD \leftrightarrow BADC; ABCD \leftrightarrow ADCB, ABCD \leftrightarrow CBAD
 \vec{v} 自身になる(点が直線上)か、もとと平行な直線になる。
2. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
1. (略)
2. それぞれの係数は順に、 $(\frac{11}{8}; \frac{1}{8}; \frac{3}{8})$.
3. 三点を A, B, C とすると、法線が AB, AC にともに垂直であることを利用して求めて、点 A を通る。
 $ax + by + cz = 1$ において座標を代入。直線 AB の方程式を求めて、それを含んで C を通る。
4. 原点を通過して平面に垂直な直線をパラメータ表示する。原点をあらわすパラメータと平面上の点のパラメータ …。 $(\frac{3}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{8})$
5. (略)
1. 円積、倍積、角の三等分。
2. 角の2等分、垂直二等分線、点から直線に垂線を。
3. (略)
1. 初等幾何。 $(\cos a; \sin b)$ と $(\cos b; \sin b)$ の内積。 $A(\cos a; \sin a), B(\cos(\frac{A}{2}b); \sin(\frac{A}{2}b)), C(\cos(a+b); \sin(a+b))$ D(1,0) として、弦 AB と弦 CD とが等しい。回転をあらわす行列の積。回転をあらわす複素数の積。三角形で $a = b \cos C + c \cos B$ に正弦定理を代入。
2. (略)
3. 149ページ参照。

代数記 22 ^{（親切マーク）}
対数のあり式の攻略法

主要公式の確認

$(1) \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (a > 0)$ $\sqrt[n]{-a} = -a^{\frac{1}{n}} \quad (n \text{ は奇数}, a > 0)$ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$	}	指数関数に つける公式
$(2) \log_a A = \frac{\log A}{\log a} \quad (\text{底の変換公式})$		常用対数
* $\log_{10} x$ の底 10 を略して $\log x$ とかくことがある。		
$(3) \log(a^\alpha \cdot b^\beta) = \alpha \log a + \beta \log b$		
∴ 教 p. 52 の基本性質 II, III を統合したもの。		

教 p. 53 例題 2

$\log_2 36 \cdot \log_3 32 + \frac{5}{3} \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{8}$ $= \frac{\log 36}{\log 2} \cdot \frac{\log 32}{\log 3} + \frac{5}{3} \cdot \frac{\log \frac{1}{8}}{\log \sqrt{3}}$ $= \frac{\log(2^2 \cdot 3^2) \cdot \log 2^5}{\log 2 \cdot \log 3} + \frac{5}{3} \frac{\log 2^{-3}}{\log 3^{1/2}}$ $= \frac{(2 \log 2 + 2 \log 3) \cdot 5 \log 2}{\log 2 \cdot \log 3} + \frac{5}{3} \cdot \frac{(-3) \cdot \log 2}{(\frac{1}{2}) \cdot \log 3}$	[解説の案] 必ず底を 10 に統一する そのため上の公式 (2) が重要。 (1) を使えば、 素因数分解して、 a^α の形に作り、 公式 (3)
	この辺対数は $\log 2$ と $\log 3$ だけしか出ていない ことに注意。

$$\begin{aligned}
 \log 2 &= u, & \log 3 &= v & & u < v \\
 &= \frac{(2u + 2v) \cdot 5u}{uv} & & & & - 10 \cdot \frac{u}{v} \\
 &= \frac{10(u+v)u - 10u^2}{uv} \\
 &= \frac{10uv}{uv} = \underline{\underline{10}} \quad \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

log の入った文字があるときは、
しつこく見ると...

公式に適用する順番
がポイントなので解
法の流れを覚える
べし

[補足練習]

1. [V287] $\log_a x = 2$, $\log_a y = 6$, $\log_a z = \frac{5}{4}$ ($a > 0, a \neq 1$)
 n とし $\log_a \frac{x \cdot y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} z^2}$ を求めよ。 [明治(工) 昭61]
2. [III273] $\log_{\sqrt{2}} 8 - \log_{\sqrt{3}} 9$ を求めよ。 [琉球(理系) 昭53]
3. [II525] $\log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 8$ を求めよ。 [鹿児島大 昭45]
4. [I1371] $(\log_2 5 + \log_4 0.2)(\log_5 2 + \log_{25} 0.5)$
* 編者が5の逆数、0.2は5の逆数の逆数、0.5は? [東京外語大 昭38]
5. [I1351] $\log_2 (\log_2 49) + 2 \log_4 (\log_7 2)$ [埼玉大 昭39]

↑ 旺文社の大学入試問題集の整理番号。

- [答] 1. 2 2. 2 3. $\frac{3}{2}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. 1.

1. 速度、時間、加速度；円の面積、半径、円周；球の体積、半径、表面積 など
2. 最大、最小での最適化。関数を整関数によって近似（テーラー展開など）することによって内挿、外挿。
3. $y = 2x^3 - 3x^2$ へ $(3,0)$ から引いた接線の傾きを考えると？(以下略)
4. 領域を座標平面上に図示してから、 $x + y$ の等高線。あるいは、 $x + y = k$ おいてから、 y を消去し x が実数である条件。 $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$ などにおいて三角関数の単項化。
5. 49ページ。

1. 以下の答えは各問に添えて書きました。

1. 式：expression など。なお、「関数」は中国語での音訳「函数」から当用漢字の漢字制限によって音が同じ字を宛てたもの。

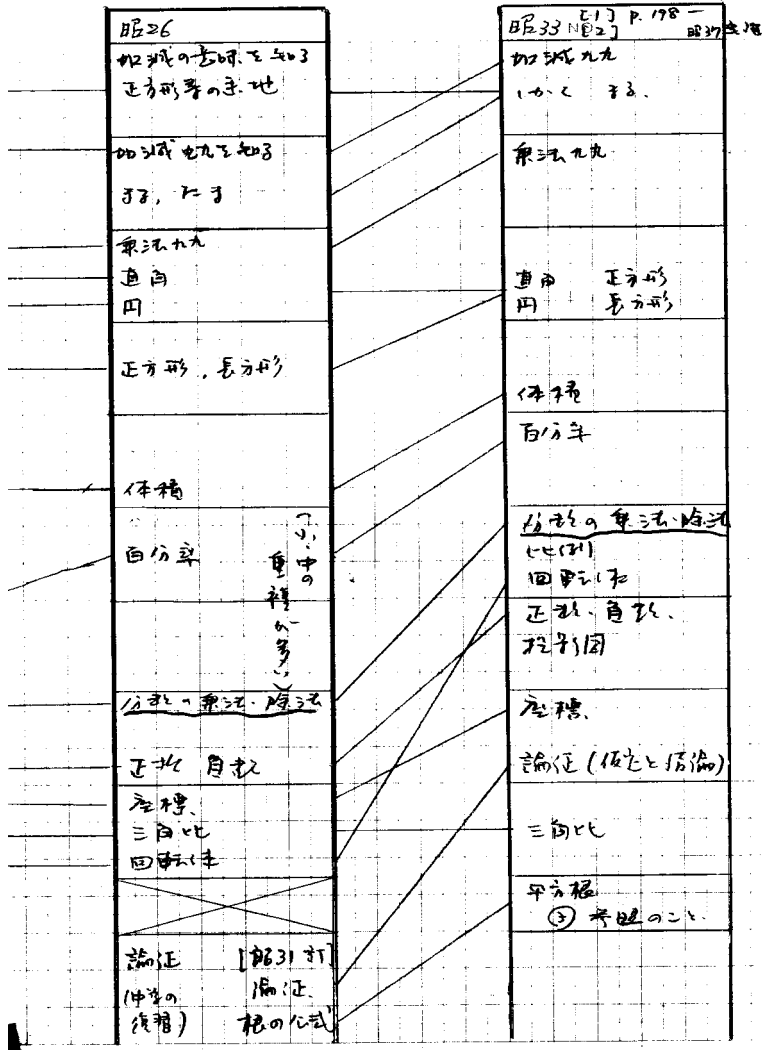
1. (略)

2. より詳しくは、朝日新聞学芸部編,1979『ふみくら 日本の文庫案内』(出版ニュース社)。

1. むかし大学院での資料として作ったもので、手書きですが……。152ページ参照。

2. (略) 関連する文献として、拙稿：正田「中1 幾何の授業構想」(『教育方法研究』Vol.22(1996)) をご覧いただければ幸いです。

学年	昭22 [7]p.145	昭23(9月)昭24施行
小1	<11以上の数の除法	四角, 円四角 など
小2	乘法九九 直方	<11以上の数の除法
小3	円の半径	乘法九九 直方 円
小4	2位数による除法 対称形 回転体	円の半径 正方形, 長方形
小5	百分率 体積	2位数による除法 体積
小6	分数の乗法・除法 比例 三角形の面積	
中1	正数・負数 投影図	百分率
中2	角錐 三角比	分数の乗法・除法 比例
中3	数学の生活における 位置や順序に関する こと	正数・負数 角錐 三角比 回転体
高等学校	【学習指導要領に 基づき教科書の内容を 再編する】	【再編の推移】 (昭22~昭23)



[著者紹介]

1957 年 東京に生まれる。
1980 年 東京大学教育学部学校教育学科卒業
城北高等・中学校教諭
1984 年 東京学芸大学大学院修了（教育学修士）
武蔵高等・中学校教諭
1997 年 東京電機大学工学部人文社会系列 助教授
1999 年 三重大学教育学部助教授（数学教室）
専攻 教育方法、数学教育
住所 177{0033 東京都練馬区高野台 3{37{12
E-メール ri o@edu. mie-u. ac. jp

自分を広げるための数学

| { ちょっと昔の高校生へ | {

著作：正 田 良

1998 年 7 月 15 日発行

2001 年 9 月 3 日暫定電子版^[8]

（第 1 版当時の）発行者：東京電機大学生協同組合

東京都千代田区神田錦町 2-2

TEL.03-3294-2708

定価：740 円

^[8]東京電機大学生協での品切れに伴って、電子版としてアップロードしましたが、Style ファイルの不
一致のためレイアウトがおかしくなっています。後期の講義に間に合わせるために、暫定版として。