1　多項式同士の掛け算

　多項式同士の掛け算は，図のように双方の多項式を長方形の辺の長さとみなし，その長方形の面積を求めるものである。

$$(x+2)(x^3+2x^2+4x+8)$$

	x^3	$2x^2$	$4x$	8	
x	x^4	$2x^3$	$4x^2$	$8x$	
2	$2x^3$	$4x^2$	$8x$	16	

図 1: 掛け算は長方形の面積

　その長方形を構成する，小さな長方形の各部分をもれなく，重なりなく足し合わせる必要がある。そこで，式として途中経過を示す必要がある場合でも，2 行に分けて，長方形の上の部分と，下の部分と区別すると後でチェックがしやすい。
　また，同類項をまとめる必要があるので，次数が同じものの横の位置を揃えれば，視線を縦に動かすだけで済むので，計算による疲労が軽減される。

$$\begin{array}{rllllll}
(x+2)(x^3+2x^2+4x+8) & = x^4 & +2x^3 & +4x^2 & +8x & \\
 & & +2x^3 & +4x^2 & +8x & +16 \\
 & = x^4 & +4x^3 & +8x^2 & +16x & +16
\end{array}$$

　さらに，途中経過を記す必要のない場合，係数だけ記すようにすると効率がよい。ちょうど自然数同士の掛け算の筆算のように，行をずらしてかいて，縦に足す要領とよく似てくる。

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 4 & 8 & \\
\times & 1 & 2 & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & 8 & \\
 & & 2 & 4 & 8 & 16 \\
\hline
 & 1 & 4 & 8 & 16 & 16
\end{array}$$

2　若干の練習

次の計算をしましょう[1]。

1. $(x^3+2x^2+3x+4)(x+1)$
2. $(x^3+x^2+x+1)(x+1)$
3. $(x^3+x^2+x+1)(x-1)$
4. $(x^3+2x^2+3x+4)(x-1)$
5. $(x^6-x^5+2x^4+3x^3+5x+8)(x+1)$
6. $(x^6+x^5+2x^4+3x^3+5x^2+8x+13)(x-1)$

【問】（被乗数の係数の和）×（乗数の係数の和）　を計算して、（積として算出した式の係数の和）　と一致するかとみる検算の方法がある。もちろん，計算ミスがあることを知らせるものだが，すべての計算ミスを探知できるわけではない。

計算が正しいとき，

$$\begin{aligned} &（被乗数の係数の和）\times（乗数の係数の和）\\ = &（積として算出した式の係数の和）\end{aligned}$$

となるのはなぜか[2]　。

[1]

1. $x^4+3x^3+5x^2+7x+4$
2. $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$
3. x^4-1
4. $x^4+x^3+x^2+x-4$
5. $x^7+x^5+5x^4+3x^3+5x^2+13x+8$
6. $x^7+x^5+x^4+2x^3+3x^2+5x-13$

[2](式の係数の和) は，$x=1$ のときの式の値だから。

3　ホーナー法

x についての多項式の式の値を求める際に，式で x^5 と簡単に書けるものも，$x=4$ のときの式の値を計算するのは，面倒ではある[3]。

式の係数だけ書き並べて，多項式×多項式の計算をすることを紹介した。それにちなんで，式の値を計算する「ホーナー法」という方法を紹介しておく。

例えば，$f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ のときに，$f(2)$ を求めるには，

別途，説明のパワポをどうぞ。

ちなみに，この式は $(x+1)^4$ なので，

$$f(2)=(2+1)^4=3^4=81$$

になるはず。

4　$(x+y)$ の累乗

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ に，$(x+y)$ をかければ，$(x+y)^3$　が得られるが，次々同様な操作を繰り返していく。

次第には，要するに前のものを 1 つずらして，足しているんでしょと見えてきてしまう。そんなわけで，Pascal（Blaise Pascal、1623 - 1662）は，$(x+y)^n$ の係数が並んだ数の三角形を作った。「パスカルの三角形」とはこの三角形のこと。

	1	1			
×	1	1			
	1	1			
		1	1		
	1	2	1		
×	1	1			
	1	2	1		
		1	2	1	
	1	3	3	1	
×	1	1			
	1	3	3	1	
		1	3	3	1
	1	4	6	4	1

図 2: ずらして足して累乗を作る

[3]実は，1024 である

					1						
				1		**1**					
			1		**2**		**1**				
		1		**3**		**3**		**1**			
	1		**4**		**6**		**4**		**1**		
1		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**	

図 **3:** パスカルの三角形

5　後に，数列のところで再会するはず

中学で既出の「公式」[4]に関連して，次の復習や計算をしましょう。

1. $(x+1)\,(x-1)$
2. $(x^2+x+1)(x-1)$
   【問】 この計算を使って，a^3+b^3 の因数分解をしましょう。[5]
3. 　まずこの展開の結果を予想しましょう。
   $(x^3+x^2+x+1)(x-1)$ そして実際の計算で確かめましょう。
4. $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)$ の結果を暗算で出しましょう。
5. x^5+1 の因数分解をしましょう。
   【問 1】まえのところで,「 x^4+1 の因数分解をしましょう。」とは聞いてないのはなぜでしょう。
   【問 2】この流れでは,「 x^4-1 の因数分解をしましょう。」は，ある種のひっかけ問題です。やってみてください。
6. $(x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)$
   の結果を予想して，その予想を答えなさい。
7. $(x^{99}+x^{98}+x^{97}+\cdots+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)$
   の結果を予想して，その予想を答えなさい。
8. $2^{10}=1024$ です。

$$1+2+4+8+16+\cdots+256+512+1024$$

   の結果を予想して，その予想を答えなさい。

---

[4]ナントカの自乗引くカントカの自乗
[5]$x=a, y=-b$ とすると？