.... 助言者 [1] からの補足資料.....................
2024 年 8 月 2 日（金）第 106 回全国算数・数学教育研究（大阪）大会
高等学校　第 4 分科会　数学 II・数学 B① 発表 3 [2]
....

発表者の予稿をなぞりながら，助言者として，計算の改造・補足を試みます[3]。

1　研究の目的・3 通りの選択肢

発表者の使われる「研究」という言葉の意味，ならびに，想定する影響[4] ☆。

1.　面白そうだから考えてみました。
2.　別証・別解として知っておくと，見通しがよくなって，面白くなります。
3.　この方法が現行のものよりも優れているので，教科書・指導要領を変えるべき。

2　極限を使わない数 I 的微分

2.1　「微分係数」の定義

x に関する整関数 $f(x)$ が，

$$f(x)=f(t)+m(x-t)+(x-t)^2r(x)$$

の形【ただし $r(x)$ は，x に関する整式】にかけるとき，m を，$x=t$ での $f(x)$ の「微分係数」と呼ぶ。また，この m ，t の値による関数と書けるとき，（慣例によって）その関数を $f'(t)$ と書く。また，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=f'(x)$ と書くこともある（微分演算子)。これのことを，$f(x)$ を x で微分した「導関数」ともいう。

2.2　線形性に関する注意

$f_1(x), f_2(x)$ は，x についての整関数，c_1, c_2 は定数として，
$f(x)=c_1\cdot f_1(x)+c_2\cdot f_2(x)$ と書けるとき，

$$f'(x)=c_1\cdot f_1'(x)+c_2\cdot f_2'(x)$$

---

[1]　**担当**：正田　良　成蹊大学非常勤講師 **rio1957@gakushikai.jp**
[2]　202 室（10：30〜11：05）
[3] 当日のご発表によって，☆の箇所を改訂しています。
[4] 発表者は 2. を意図されているとのこと。

2.3　二項定理を使えば，次数について一般的に

$f(x)=x^n$ のとき，$x=t+h$ とおくと，$h=x-t$。二項定理で，

$$\begin{aligned} f(x) &= (t+h)^n \\ &= t^n +_n \mathrm{C}_1 \cdot h \cdot t^{n-1} +_n \mathrm{C}_2 \cdot h^2 \cdot t^{n-2} + \cdots \\ &= f(t) + nt^{n-1}(x-t) + (x-t)^2 \{r(x)\} \end{aligned}$$

よって，$\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$。

3　アルキメデスでさえ極限

古代ギリシャのアルキメデスは，重心（細かく分けて足し合わせる）[5] や，取り尽くし法（等比級数）で，放物線を境界とする領域の面積を出しています。どちらも，極限を使っている。

$S=\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$，$T=\displaystyle\int_0^{0.5} x^n\mathrm{d}x$ とおく。偏相似変換 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ で，後者が面積を表す図形は前者のそれになる。よって，$S=2^{n+1}T$。

また，$R=\displaystyle\int_{0.5}^1 \{x^n-(1-x)^n\}$ とすると，図形としての S,T,R の関係を考えて，$S=\dfrac{2^n}{2^{n-1}-1}R$。

$n=2$ のときは，三角形の面積に帰着しますが，$n \geqq 3$ となると[6] ☆。

4　論理と心理

数学史上，人類は現実世界との関わりによって,「微分」という関数から関数への写像を考えてきました。

数学的には高度な概念は，速さや面積・体積という現実世界とのかかわりによって把握されました。論理だけではない，心理が介在しているように思えてきます。

中途半端に形式的な「極限」の扱いではなく，生徒の「わかった」気持ちを大切にする授業が求められるように思います。

---

[5] バルク (1961)『重心の概念の幾何学への応用』東京図書・数学新書

[6] 例えば，$2\displaystyle\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{x^3-(x-1)^3\right\}\mathrm{d}x$ に注目し，右辺の被積分関数を表す式を展開し，2 次以下の積分に帰着させる。数学的帰納法などを要しますが，導くことは可能です。