たのしい数学通信(28)

2015. 10. 08

教科書外公式

高校で扱う「数列」。その中で、次のような公式があります。

$$①\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1) \qquad ②\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Σの記号の意味は「総和（全部の合計）」とでも思ってもらえばいいのですが、その「全部」とは、記号の下の値（ここでは１）から上の値（ここではｎ）までのことです。具体的な例をあげれば、

$$\sum_{k=1}^{100} k=1+2+3+4+5+\cdots\cdots+100=\frac{1}{2}\times100\times101$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+100^2=\frac{1}{6}\times100\times101\times201$$

のようになります。教科書ではこの後、

$$③\sum_{k=1}^{n} k^3=$$

という公式が出てきます。意味は分かったとしても、＝の後、つまり具体的な公式がどのようになっているかは想像がつかないと思います。（圧倒的大多数の高校生も同じです。したがってこれらの公式は‘１つ１つ覚える＝暗記する’という乗り切り方をされてしまいます。これって勉強？ ）

これらとは別に、教科書には登場しませんが、次のような公式（教科書には出てこないので僕は仕方なく‘準公式’と呼ぶことにしています。）もあります。

$$(1)\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1) \qquad (2)\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(1)は先の①と同じです。(2)は

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\cdots\cdots+100\times101=\frac{1}{3}\times100\times101\times102$$

のように計算されます。では、この次

$$(3)\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=$$

がどうなるか？　想像してみてください・・・・・・・はい！　正解です。(1)～(3)を並べてみます。

$$(1)\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$(2)\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$(3)\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

美しいですね。そして美しいだけでなく、〔その次〕〔その次の次〕・・・も想像がつく（そしてその想像は正しいのですが）ところもいいですね。そして想像が正しいということも『数学的帰納法』という手法を使うと簡単に証明することもできます。

この準公式が高校教科書では全く触れられていない（そのかわりに別の形でつまらない問題として登場する）のはとても残念です。形が美しい、覚えやすい、次につなげやすい・・・こんないいものを何故無視するのでしょうか？　ある受験雑誌では系統的な取り上げられ方をしたことがあったのに。

ところで、最初に挙げた公式の③ですが、次のようになります。

$$③\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

この式を予想して、しかも正解した方はおられるでしょうか？　さらに、これらから、

$$④\sum_{k=1}^{n} k^4=$$

の予想がつく人がいるでしょうか？　いないと思います。それでは大変だ！さらにもう１つ別の公式を暗記しなければならないのか・・・幸か不幸か、この④は高校数学では登場しません。　　　（進）